

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG - WIEN · F. MAGYAR - WIEN

E. MELAN - WIEN · H. MELAN - WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND XI, HEFT 2

MIT 32 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 18. APRIL 1957)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG  
1957



Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)

Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Tel. 63 76 71, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen mitzulefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdruckweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag.

## Band XI, Heft 2

## Inhaltsverzeichnis

### Originalarbeiten

	Seite
<b>M. Kotal.</b> Relaxationsmethode. (Mit 9 Textabbildungen) .....	93
<b>F. Lachner.</b> Über die richtige Farbenwiedergabe. (Mit 5 Textabbildungen) .....	103
<b>H. Görtler und H. Witting.</b> Zu den Tanischen Grenzsichten. (Mit 8 Textabbildungen) ....	111
<b>H. Hofmann.</b> Über den Kraftangriff des allgemeinen, nichtstationären elektromagnetischen Feldes an der Materie.....	123
<b>F. Jindra.</b> Beitrag zur nichtlinearen Torsion. (Mit 4 Textabbildungen) .....	134
<b>K. Desoyer.</b> Zur rollenden Reibung zwischen Scheiben mit verschiedenen Elastizitätskonstanten. (Mit 6 Textabbildungen) .....	146
Otto Lange — 70 Jahre (F. Magyar) .....	161

<b>Mitteilung</b> .....	161
-------------------------	-----

<b>Buchbesprechungen</b> .....	161
--------------------------------	-----

Bishop, R. E. D. und D. C. Johnson, Vibration Analysis Tables (H. Parkus). — Eck, B., Technische Strömungslehre. 5. Aufl. (R. Bruniak). — Ginsburg, Th., Untersuchungen über die dreidimensionale Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter (R. Bruniak). — Hammond, R., Engineering Structural Failures (F. Magyar). — van Langendonck, T., Cálculo de Concreto Armado. Band I. 2. Aufl. (P. Pongratz). — Prager, W., Probleme der Plastizitätstheorie (F. Chmelka). — Szabó, I., Einführung in die Technische Mechanik. 2. Aufl. (H. Parkus). — Town, H. C. und R. Colebourne, Engineering Inspection, Measurement and Testing (R. Vockenberger).



# Relaxationsmethode\*

Von Miroslav Kotal, Prag

Mit 9 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Die Relaxationsmethode ist eine Abart der Iterationsmethoden zur Lösung des Gleichungssystems. Sie wird als eine Netzmethode für Berechnung der elektromagnetischen Felder dargestellt. In diesem Falle muß Laplacesche oder Poissonsche Differentialgleichung in eine Differenzengleichung transformiert werden. Singuläre Punkte in dem Potentialfeld verursachen bei den Berechnungen große Schwierigkeiten. Als Beispiel wird eine Lösung des Stirnfeldes eines Generators eingeführt.

## I. Einleitung

Eine Untersuchung der elektromagnetischen und elektrotechnischen Felder ist wegen der verschiedenen Randbedingungen sehr schwierig. Bei experimentaler Untersuchung dieser Felder werden entweder direkte Methoden oder passende Modelle benutzt. Von den graphischen Methoden ist die Lehmannsche Methode die bekannteste. Manchmal kommen auch die analytischen Methoden in Betracht. Für die unkomplizierten Randbedingungen wird die Methode der konformen Abbildung (Schwarzsches Theorem) angewandt. Die Netzmethode, die als ein spezieller Fall einer Relaxationsmethode dargestellt werden kann, ist wenig bekannt. Diese Methode, die von Southwell<sup>1</sup> erarbeitet wurde, ist eine Abart der Gauß-Seidelschen Iterationsmethode für die Lösung der simultanen Gleichungen. Eine ähnliche Methode von Liebmann beruht auch auf Iterationsverfahren. Diese Methoden werden auch zur Lösung der Differentialgleichungen, die mit gewisser Annäherung als Differenzengleichungen ausgedrückt werden können, benützt. In unserem Falle führen wir nur das Rechenverfahren der Lösung einer partiellen Differentialgleichung eines Potentialfeldes ein, die in allgemeiner Form lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = f(x, y). \quad (1)$$

Wenn die Koeffizienten  $A, B$  als eine Funktion von  $x, y$  dargestellt werden können, erhält man eine Gleichung mit veränderlichen Koeffizienten. Falls  $A = B = 1$  ist, hat man:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (2)$$

Diese Gleichung mit  $f(x, y)$  auf der rechten Seite wird auch Poissonsche Gleichung genannt. Wenn wir  $f(x, y)$  auf Null bringen, bekommen wir eine Laplacesche Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

oder:

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

\* Diese Benennung ist meistens in der Literatur benutzt, obwohl sie sich nur auf Berechnung eines Gleichungssystems bezieht.

<sup>1</sup> R. V. Southwell: Relaxation Methods in Theoretical Physics. Oxford University Press. 1949.



Man nennt die Methode Relaxationsmethode, weil das ganze Rechenverfahren als Berechnung der Fachträger betrachtet werden kann. In diesem Falle halten wir die Reste, die sog. Residuen, für ungewünschte äußerliche Kräfte, die Schritt für Schritt auf erforderliche Kleinheit herabgedrückt werden (eine Relaxation). Bei der Lösung der elektromagnetischen Felder<sup>2</sup> bedeuten die Residuen die magnetischen Quellen der betreffenden Punkte des Netzes (das heißt die rechten Seiten der Poissonschen Gleichungen). Alle Berechnungen werden unter einer Voraussetzung eines ebenen Feldes durchgeführt. Das dritte Glied tritt also in der Gl. (3) nicht auf.

Das gleiche Rechenverfahren kann auch bei biharmonischer Gleichung angewendet werden:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = f(x, y). \quad (4)$$

## II. Über die Wahl des Netzes und des entsprechenden Bereiches

Man überdeckt das Feld, in dem die Gl. (3) gelöst werden soll, mit einem quadratischen Netz von der Maschenweite  $a$ . Manchmal wird auch das Feld in Drei- oder Sechsecke geteilt. In speziellen Fällen können auch die Parallelogramme benützt werden. In einzelnen Netzpunkten werden die numerischen Werte mit vorgeschriebener Genauigkeit, die der Gl. (2) und (3) genügen, berechnet. Den Bereich wählt man auf solche Weise, daß sein Rand durch Netzpunkte gebildet werden soll, oder daß die Randpunkte sich immer zwischen inneren und äußeren Netzpunkten befinden.

## III. Rechnerische Voraussetzungen

Es werden im Felde, das der Gl. (3) genügt, ein beliebiger Punkt 0 und vier Nachbarnpunkte 1, 2, 3, 4 angegeben (Abb. 1). Mit  $\varphi_i$  bezeichnen wir ein zugehöriges Potential des betreffenden Punktes  $i$ . Wir gehen vom Taylorschen Satz der Reihenentwicklung aus. Man erhält für das Potential im Punkt 1

$$\varphi_1 = e^{a_1 \frac{\partial}{\partial x}} \varphi_0 = \left( 1 + a_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a_1^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots \right) \varphi_0. \quad (5)$$

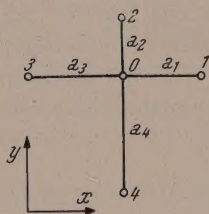


Abb. 1.  
Relaxationsfigur

Voraussetzung für die Gültigkeit des Taylorschen Satzes ist, daß alle vorkommenden Ableitungen existieren und stetig sind. Ähnlicherweise erhält man auch für andere Netzpunkte:

$$\varphi_2 = e^{a_2 \frac{\partial}{\partial y}} \varphi_0 = \left( 1 + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_2^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots \right) \varphi_0, \quad (6)$$

$$\varphi_3 = e^{-a_3 \frac{\partial}{\partial x}} \varphi_0 = \left( 1 - a_3 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a_3^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \dots \right) \varphi_0, \quad (7)$$

$$\varphi_4 = e^{-a_4 \frac{\partial}{\partial y}} \varphi_0 = \left( 1 - a_4 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_4^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \dots \right) \varphi_0. \quad (8)$$

Nach Vernachlässigung der Glieder von dritter und höherer Ordnung und nach der Durchführung der Elimination von  $\frac{\partial}{\partial x}$  und  $\frac{\partial}{\partial y}$  aus den Gl. (5) bis (8) bekommen wir für die Poissonsche Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{2}{a_1 + a_3} \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{a_1} + \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{a_3} \right) + \frac{2}{a_2 + a_4} \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{a_2} + \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{a_4} \right) = \\ = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = f(x, y)_0. \end{aligned} \quad (9)$$

<sup>2</sup> A. Weigand: Die angenäherte Berechnung ebener und rotationssymmetrischer Potentialfelder mit Hilfe des Differenzenverfahrens. Berlin. 1953.



Wenn wir

$$a_1 = a_3 = a,$$

$$a_2 = a_4 = b$$

einsetzen, wird die Gleichung des Potentials im Punkte 0 von der Form sein:

$$\varphi_0 = \frac{(\varphi_1 + \varphi_3) b^2 + (\varphi_2 + \varphi_4) a^2 - f(x, y)_0 a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)}. \quad (10)$$

Im Falle des quadratischen Netzes ist  $a$  gleich  $b$

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4} - \frac{a^2 f(x, y)_0}{4} \quad (11)$$

und für die Laplacesche Gleichung<sup>3</sup>:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4}. \quad (12)$$

Da die Glieder von zweiter und höherer Ordnung in Gl. (5), (6), (7), (8) vernachlässigt werden, erweist die Endgleichung (10), (11), (12) einen gewissen Fehler, der

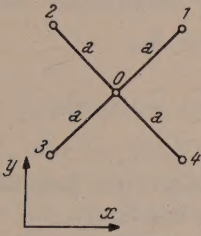


Abb. 2. Diagonalrelaxationsfigur

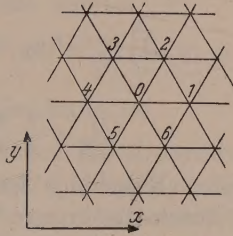


Abb. 3. Dreiecksnetz

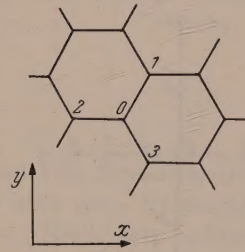


Abb. 4. Sechsecksnetz

annähernd der Ordnung  $a^2$  ist. Nach einer ausführlichen Errechnung<sup>4, 5</sup> bekommen wir aus der Gl. (5) bis (8), wenn gleichzeitig  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$  eingesetzt wird:

$$\sum_{i=1}^4 \varphi_i - 4 \varphi_0 = 2 \left[ \frac{a^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \right) + \frac{a^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial y^4} \right) + \frac{a^6}{6!} \left( \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial y^6} \right) + \dots \right]; \quad (13)$$

daraus folgt:

$$\frac{1}{a^2} \left( \sum_{i=1}^4 \varphi_i - 4 \varphi_0 \right) = \Delta \varphi_0 + R_0, \quad (14)$$

worin die Restglieder

$$R_0 = \frac{2 a^2}{4!} \left( \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial y^4} \right) + \frac{2 a^4}{6!} \left( \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial y^6} \right) + \dots \quad (15)$$

sind. Wenn wir in Nachbarpunkten die Ableitungen von dritter Ordnung und im Mittelpunkt die Ableitungen von vierter Ordnung in das Rechenverfahren einführen, erhalten wir folgenden Ausdruck für die Restglieder:

$$R_0 = \frac{4 a^2}{4!} \partial M_4 \quad (|\partial| \leq 1), \quad (16)$$

worin  $M_4$  absoluter Maximalbetrag der Ableitungen von vierter Ordnung  $\frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4}$  und  $\frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial y^4}$  ist.

<sup>3</sup> Hugh McKibbin: Relaxation Methods I., II. Electr. Rev. **167**, 87 (1955).

<sup>4</sup> L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin: Springer-Verlag. 1955.

<sup>5</sup> L. V. Kantorovitsch-V. I. Krylov: Die Methoden höherer Analysis. Moskau. 1951 (in russischer Sprache).

Entsprechend stellen wir auch die Taylor-Entwicklung für die Relaxationsfigur nach Abb. 2:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \varphi_i - 4 \varphi_0 &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4 \varphi_0 = \\ &= 4 \left\{ \frac{a^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \right) + \frac{a^4}{6!} \left( \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial y^4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^6}{6!} \left( \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial y^6} \right) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Man kann beide Ausdrücke (13), (17) unter gewissen Voraussetzungen zusammenfassen, was zur Verdichtung der Netzkpunkte und dadurch zur größeren Genauigkeit der Berechnung führt. Für Dreiecksnetz ergibt sich (Abb. 3):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \varphi_i - 6 \varphi_0 &= \frac{3 a^2}{2!} \Delta \varphi_0 + \frac{9}{4} \frac{a^4}{4!} \Delta^2 \varphi_0 + \\ &+ \frac{a^6}{6!} \left( \frac{33}{16} \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial x^6} + 15 \frac{3}{16} \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{9}{16} \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{27}{16} \frac{\partial^6 \varphi_0}{\partial y^6} \right) + \dots; \end{aligned} \quad (18)$$

daraus

$$\sum_{i=1}^6 \varphi_i - 6 \varphi_0 = \frac{3}{2} a^2 \Delta \varphi_0 + R_0, \quad (19)$$

worin

$$R_0 = \frac{9}{4} \frac{a^4}{4!} \Delta^2 \varphi_0 + \dots \quad (20)$$

ist. In erster Näherung kann man also die Laplacesche Gleichung durch die lineare Beziehung ersetzen:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6}{6}. \quad (21)$$

Abb. 5. Relaxationsfigur zur Erhöhung der Berechnungsgenauigkeit

Und die Poissonsche Gleichung:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6}{6} - \frac{f(x, y)_0 a^2}{4}. \quad (22)$$

Man kann auch ein Sechsecksnetz verwenden (Abb. 4):

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - 3 \varphi_0 = \frac{3}{4} a^2 \Delta \varphi_0 + R_0, \quad (23)$$

worin

$$R_0 = - \frac{a^3}{3!} \left( \frac{3}{4} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3} - \frac{9}{4} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x \partial y^2} \right) + \dots \quad (24)$$

ist. Für praktische Anwendung nimmt diese Gleichung folgende Gestalt an:

$$\varphi_0 = \frac{1}{3} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3), \quad (25)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{3} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \frac{a^2}{4} f(x, y)_0. \quad (26)$$

Weitere Erhöhung der Berechnungsgenauigkeit<sup>6</sup> erhält man aus der Relaxationsfigur Abb. 5. Aus der Gl. (5) bis (8) folgt:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_3 - 2 \varphi_0 &= a^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{12} a^4 \left( \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4} \right) + \dots, \\ \varphi_2 + \varphi_4 - 2 \varphi_0 &= a^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{12} a^4 \left( \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial y^4} \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

<sup>6</sup> H. Motz-L. Worthy: Calculation of the Magnetic Field in Dynamo-Electric Machines by Southwell's Relaxation Method. J. Inst. Electr. Engr. 1945, 522.



Ähnlicherweise können wir schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1'} + \varphi_{3'} - 2\varphi_0 &= 4a^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \right) + \frac{4}{3} a^4 \left( \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4} \right) + \dots, \\ \varphi_{2'} + \varphi_{4'} - 2\varphi_0 &= 4a^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \right) + \frac{4}{3} a^4 \left( \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial y^4} \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Unter Voraussetzung, daß Glieder von höherer Ordnung als  $a^4$  vernachlässigt werden, und nach Elimination  $\frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4}$ ,  $\frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial y^4}$  erhalten wir:

$$a^2 \nabla^2 \varphi_0 = \frac{4}{3} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0) - \frac{1}{12} (\varphi_{1'} + \varphi_{2'} + \varphi_{3'} + \varphi_{4'} - 4\varphi_0). \quad (29)$$

Daraus können wir den Wert  $\varphi_0$  ermitteln:

$$\varphi_0 = \frac{4}{15} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) - \frac{1}{60} (\varphi_{1'} + \varphi_{2'} + \varphi_{3'} + \varphi_{4'}). \quad (30)$$

#### IV. Matrizenrechnung und Relaxationsmethode

Der Funktionswert  $\varphi$  kann als eine lineare Kombination der inneren Werte  $\varphi_j$  und der Randwerte  $\varphi_k$  dargestellt werden<sup>7, 8</sup>:

$$\sum_j T_{ij} \varphi_j + \sum_k U_{ik} \varphi_k + \varphi_i = 0, \quad (31)$$

worin  $\varphi_i$  absolutes Glied der Gleichung ist.

$T_{ij}$  und  $U_{ik}$  sind die numerischen Koeffizienten. Diese sind von Netzdimensionen und der Anordnung der Netzkpunkte abhängig. Sie erweisen aber eine Abhängigkeit weder von den Randwerten noch von den berechneten Werten. Nach dem bekannten Maxwell-Satz über reziproke Verschiebung gilt:  $T_{ij} = T_{ji}$ . Diese Gleichheit, die immer für eine harmonische Funktion erfüllt wird, ist notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für Konvergenz des Relaxationsverfahrens. Randwerte  $\varphi_k$  können als stabil betrachtet werden. Gl. (31) drückt eine lineare Transformation aus.

Es sei  $\varphi_i$  die Lösung der partiellen Differentialgleichung (3) im Punkte  $i$ . Dann kann die Funktion  $\varphi_i^{(v)}$  nach  $v$ -ten Iterationen als gesuchte Lösung und einem gewissen Fehler  $\psi_i$ , sog. Residuum, ausgedrückt werden:

$$\varphi_i^{(v)} = \varphi_i + \psi_i \quad v = 1, 2 \dots n, \quad (32)$$

$$\varphi_k^{(v)} = \varphi_k + \psi_k = \varphi_k \quad v = 1, 2 \dots n. \quad (33)$$

Dieser Fehler  $\psi_i$  verschwindet beim Randwert  $\varphi_k = 0$ .

Zur Vereinfachung dieses Verfahrens setzen wir die Randwerte  $\varphi_k$  gleich Null. Ähnliche Voraussetzungen macht Poincaré bei der „Ausfegemethode“ („balayage“). Für den betrachteten Fall kann man schreiben:

$$\sum_{k=1}^n T_{ik} \varphi_k^{(v)} + \varphi_i = \psi_i^{(v)}. \quad (34)$$

Der Grundgedanke des Relaxationsverfahrens besteht darin, durch systematische Korrekturen  $\Delta \varphi_1^{(v)}$ ,  $\Delta \varphi_2^{(v)} \dots \Delta \varphi_n^{(v)}$  der Versuchswerte die Residuen schrittweise immer kleiner zu machen. Diese Korrekturen ergeben die neuen Residuen:

$$\psi_i^{(v)} = \psi_i^{(v-1)} + \sum_{k=1}^n T_{ik} \Delta \varphi_k^{(v-1)}. \quad (35)$$

<sup>7</sup> E. Stiefel: Über einige Methoden der Relaxationsrechnung. Z. angew. Math. Physik **3**, 1 (1952).

<sup>8</sup> G. Temple: Relaxation Methods Appl. to Linear Systems. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **169**, 476.

Die Näherungswerte  $\varphi_i^{(v)}$  und Residuen  $\psi_i^{(v)}$  fassen wir zu Vektoren zusammen. Als Skalarprodukt dieser zwei Vektoren bekommen wir folgenden Ausdruck:

$$\varphi^{(v)} \psi^{(v)} = \sum_{i=1}^n \varphi_i^{(v)} \psi_i^{(v)} = \sum_{i=1}^n \varphi_i^{(v)} \sum_{k=1}^n T_{ik} \varphi_k^{(v)} + \sum_{i=1}^n \varphi_i^{(v)} \varphi_i. \quad (36)$$

Indem wir

$$Q(\varphi_i^{(v)}) = \frac{1}{2} \sum_{(i,k)} T_{ik} \varphi_i^{(v)} \varphi_k^{(v)} + \sum_{i=1}^n \varphi_i^{(v)} \varphi_i \quad (37)$$

setzen, das heißt eine quadratische Funktion, worin  $\sum_{(i,k)} T_{ik} \varphi_i^{(v)} \varphi_k^{(v)}$  eine positiv definite quadratische Form ist. Durch Differenzieren dieses Ausdruckes folgt:

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi_i^{(v)}} = \sum_{k=1}^n T_{ik} \varphi_k^{(v)} + \varphi_i, \quad (38)$$

was eigentlich  $i$ -tes Residuum ist:

$$\psi_i^{(v)} = \frac{\partial Q}{\partial \varphi_i^{(v)}}. \quad (39)$$

Weiterhin können wir schreiben:

$$\psi_i = \text{grad } Q, \quad (40)$$

das bedeutet, daß die  $i$ -te Komponente von  $\psi$  gleich der partiellen Ableitung von  $Q$  nach  $\varphi_i$  ist. Dadurch ist eine Auflösung der gegebenen Gleichung vollständig äquivalent mit der Bestimmung des Minimums der quadratischen Funktion. In der Mechanik stellt diese Funktion eine Potentialenergie des Systems dar.

Diese Auffassung führt zur geometrischen Bedeutung der Relaxation. Zu jedem Näherungsvektor  $\varphi_i^{(v)}$  wird ein Gewichtsvektor  $p_i$  angeordnet wie folgt:

$$\Delta \varphi_i^{(v)} = \lambda p_i^{(v)} \quad p_i \neq 0, \quad (41)$$

worin  $\lambda$  ein Parameter ist. Weitere Behandlung kann nach Ritz durchgeführt werden.

Bei einer Blockrelaxation<sup>9</sup> ist  $\lambda$  der negativ genommenen Summe der Residuen, die durch Anzahl der gekreuzten Strecken des Randgebietes dividiert wird, gleich. Die Änderung der Residuen in mehreren Punkten verhält sich auf ähnliche Weise wie die Residuen in einzelnen Punkten.

Bei einer Methode des stärksten Abstieges wird Gewichtsvektor  $p_i$  entgegengesetzt gleich dem Residuenvektor  $\psi_i$  gewählt. Aus Matrizenanalysis folgt, daß in diesem Falle Korrekturfaktor  $\lambda$  der reziproke Rayleighsche Quotient des Residuenvektors ist:

$$R(\psi_i) = \frac{Q(\psi_i)}{\sum_{i=1}^n \psi_i \psi_i}. \quad (42)$$

## V. Potentialtheorie

Eine harmonische Funktion ist eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (43)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Bei der Lösung dieser Gleichung können folgende Randwertaufgaben betrachtet werden<sup>10</sup>:

<sup>9</sup> H. McKibbin-Webb: Relaxation Methods I., II. Electr. Rev. 1953, 67, 190.

<sup>10</sup> Ph. Frank-R. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. I. 1930.



a) Dirichletsches Problem (erste Randwertaufgabe): gegeben  $\varphi$  am ganzen Umfang eines geschlossenen Bereiches, gesucht  $\varphi$  im Innern oder im Außenraum des Bereiches.

b) Neumannsches Problem (zweite Randwertaufgabe): gegeben

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

das heißt die Normalkomponente am Umfang des Bereiches, gesucht  $\varphi$ . Das Rechenverfahren entspricht in diesem Falle aber nicht dem des Dirichletschen Problems.

c) Problem der Wärmeleitung.

d) In der Elektrotechnik kann das vierte Randwertproblem betrachtet werden. Dieses wird als Refraktion oder Zwischenebene charakterisiert.

## VI. Randbedingungen für die Relaxationsfiguren

### a) Lineare Interpolation

Unter einer Voraussetzung, daß die Funktion am Rande als linear betrachtet werden kann, setzen wir ein:

$$a_1 = a_1, \quad (44)$$

$$a_2 = p a_1, \quad (45)$$

$$a_3 = q a_1, \quad (46)$$

$$a_4 = r a_1. \quad (47)$$

Aus Gl. (9) folgt:

$$\frac{\varphi_1}{1+q} + \frac{\varphi_2}{(p+r)p} + \frac{\varphi_3}{(1+q)q} + \frac{\varphi_4}{(p+r)r} - \varphi_0 \left[ \frac{1}{q} + \frac{1}{pr} \right] = 0. \quad (48)$$

Für Poissonsche Gleichung ist an der rechten Seite anstatt Null folgender Ausdruck:

$$\frac{a_1^2 f(x, y)}{2}.$$

Wenn  $p$ ,  $q$  oder  $r$  wechselweise gleich Eins gelegt werden, können die gesuchten Ausdrücke für die Figuren mit den im Verhältnis  $r$ ,  $p$ ,  $q$  verkürzten Relaxationsstrahlen hergestellt werden.

### b) Parabolische Interpolation

Für den einzigen Strahl einer Relaxationsfigur kann eine parabolische Interpolation verwendet werden, indem durch die Punkte 1, 2, 3, 4 eine Parabel, die folgender Gleichung genügt, gelegt wird (Abb. 6):

$$\varphi = \varphi_2 + x \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) + \frac{x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right). \quad (49)$$

Nach Bestimmung der Differenzen

$$2a \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) = \varphi_4 - \varphi_1, \quad (50)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = \varphi_4 + \varphi_1 - 2\varphi_2 \quad (51)$$

bekommt man für den Punkt 3:

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{1}{2} p (\varphi_4 - \varphi_1) + \frac{1}{2} p^2 (\varphi_4 + \varphi_1 - 2\varphi_2). \quad (52)$$



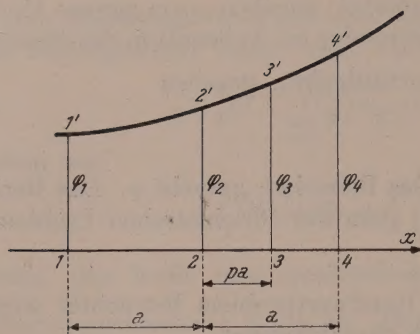


Abb. 6. Parabolische Interpolation

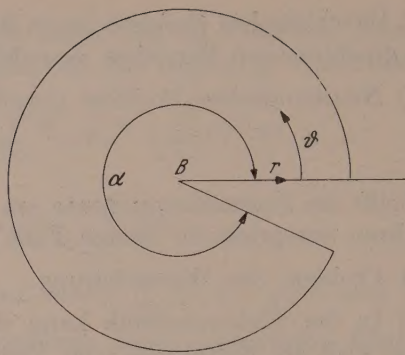


Abb. 7. Hilfsbild bei einer Singularität

### VII. Rechenverfahren bei der Singularität

Wenn die gesuchte Funktion in einem Punkte, z. B. im Punkte  $B$  (Abb. 7) unbestimmten Wert erreicht, kann die obige regelmäßige Relaxationsrechnung nicht benutzt werden<sup>11</sup>.

Wir führen zuerst die Laplacesche Gleichung (3) in die Polarkoordinaten über; Punkt  $B$  wird als Mittelpunkt betrachtet:

$$r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (53)$$

Nach Einsetzung

$$\varphi(r, \theta) = R(r) \theta(\theta) \quad (54)$$

bekommt man:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + R(r) \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} = 0. \quad (55)$$

Wenn wir

$$n^2 = - \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} \frac{1}{\theta(\theta)} \quad (56)$$

schreiben, hat man:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0. \quad (57)$$

Aus der Erlösung der Gleichung

$$\theta'' + n^2 \theta = 0 \quad (58a)$$

folgt:

$$\theta = C_1(r) \cos n \vartheta + C_2(r) \sin n \vartheta. \quad (58)$$

Es gilt  $\frac{d\theta}{d\vartheta} = 0$  für  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \alpha$ . Daraus bekommt man

$$\theta = C_1(r) \cos n \vartheta. \quad (59)$$

Weiterhin

$$n = \frac{k \pi}{\alpha}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (60)$$

und schließlich erhält man:

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k r^n \cos n \vartheta. \quad (61)$$

Auf einem Kreise, der mit kleinem Radius  $\varrho$  um den Punkt  $B$  gezogen wird, gilt:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{\varrho=0} = 0. \quad (62)$$

<sup>11</sup> H. Motz: The Treatment of Singularities of Partial Differential Equations by Relaxation Methods. Quart. Appl. Math. 4, 371 (1947).



Eine entsprechende Reihenentwicklung liefert:

$$A_{-k} = \varrho^{2n} A_{+k} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (63)$$

Wenn  $\varrho$  zu Null strebt, verschwinden die negativen Exponenten und  $\varphi$  kann durch folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$\varphi = A_0 + A_1 r^\alpha \cos \frac{\pi}{\alpha} \vartheta + A_2 r^\alpha \cos \frac{2\pi}{\alpha} \vartheta + A_3 r^\alpha \cos \frac{3\pi}{\alpha} \vartheta + \dots \quad (64)$$

Falls  $\alpha = 2\pi$ , hat man (Abb. 8):

$$\varphi = A_0 + A_1 r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} + A_2 r \cos \vartheta + A_3 r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3}{2} \vartheta + \dots \quad (65)$$

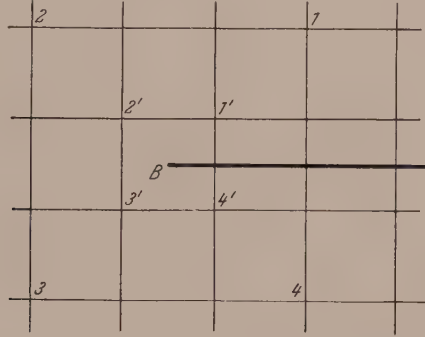


Abb. 8. Quadratisches Netz mit Singularität im Punkte B

Man legt einen Einheitskreis durch die Punkte 1, 2, 3, 4. Die Werte der Konstanten der Reihe (65) sind wie folgt:

$$A_0 = 0.25 (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4), \quad (66)$$

$$A_1 = (\varphi_2 - \varphi_3) \frac{1}{2} \cos \frac{135^\circ}{2} - (\varphi_4 - \varphi_1) \frac{1}{2} \cos \frac{45^\circ}{2},$$

$$A_1 = 0.191 (\varphi_2 - \varphi_3) - 0.462 (\varphi_4 - \varphi_1); \quad (67)$$

ähnlicherweise:

$$A_2 = 0.354 (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4), \quad (68)$$

$$A_3 = -0.191 (\varphi_1 - \varphi_4) + 0.462 (\varphi_3 - \varphi_2). \quad (69)$$

Die Werte in den Punkten 1', 2', 3', 4' werden durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1'} &= 0.593 \varphi_1 + 0.236 \varphi_2 + 0.1 \varphi_3 + 0.073 \varphi_4, \\ \varphi_{2'} &= 0.236 \varphi_1 + 0.457 \varphi_2 + 0.21 \varphi_3 + 0.1 \varphi_4, \\ \varphi_{3'} &= 0.1 \varphi_1 + 0.21 \varphi_2 + 0.457 \varphi_3 + 0.236 \varphi_4, \\ \varphi_{4'} &= 0.073 \varphi_1 + 0.1 \varphi_2 + 0.236 \varphi_3 + 0.593 \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

In anderen Netzknoten berechnet man die numerischen Werte nach den Ausdrücken (12), (48). Residuen in den speziellen Punkten werden nur addiert oder subtrahiert.

### VIII. Beispiel der Lösung

Als Beispiel wurde das Stirnfeld eines dreiphasigen Generators gewählt (Abb. 9). Es handelt sich um den Fall, in welchem nur der Stator mit Strom durchflossen wird. Wir betrachten einen Augenblick, wenn der Momentanwert in einer Phase sein Maximum erreicht und in anderen Phasen halbe Ströme fließen. Die zugehörige MMK im Stirnfeld werden der Wicklungsanordnung und der Verbreitung der MMK



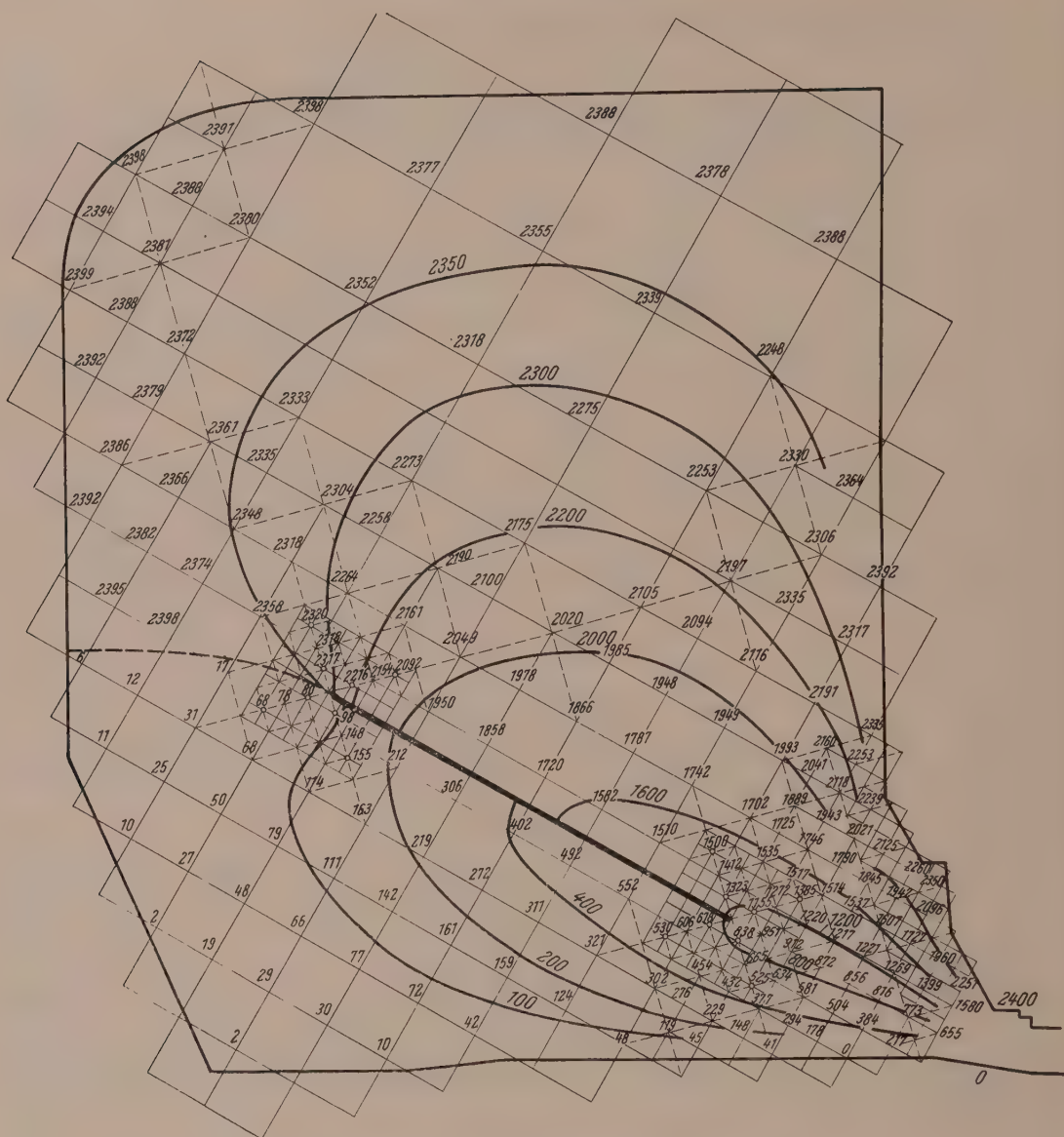


Abb. 9. Stirnfeld eines dreiphasigen Generators

in den Nuten entnommen. Beim Herunterdrücken der Residuen wurde auch die zweimalige Blockrelaxation benutzt.

### IX. Zusammenfassung

Aus der oben angeführten Analysis ist sichtbar, daß die Relaxationsmethode eine genügend präzise mathematische Methode zur Lösung von Differentialgleichungen ist. Diese Methode wurde in unserem Falle zur Lösung einer harmonischen Gleichung angewandt. Es ist ihr Vorzug, daß zum Unterschied von anderen mathematischen Methoden keine präzisen Rechenmaschinen erforderlich sind und die Rechenoperationen mit Rechenschieber durchgeführt werden können.

(Eingegangen am 20. Dezember 1956)



# Über die richtige Farbenwiedergabe

Von F. Lachner, Wien

Mit 5 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** In der vorliegenden Arbeit wird versucht, vom physiologisch-physikalischen Standpunkt aus zu zeigen, daß den üblichen Farbenreproduktionsverfahren Grenzen gesetzt sind und daß insbesondere eine richtige Wiedergabe des reinen Spektrums nicht möglich ist. Es wird gezeigt, daß eine Verbesserung durch verzweigte Verfahren möglich ist, so daß wenigstens nicht zu satte Farben richtig wiedergegeben werden, was bei additiver Wiedergabe leichter gelingt als bei subtraktiver, bei der noch eine zweite Matrix zu realisieren ist und außerdem ein trichromatisches Wiedergabeweiß nötig wäre. Angedeutet wird ferner die Möglichkeit der Anwendung von mehr als drei Wiedergabegrundfarben, die auch eine hinreichende Wiedergabe des reinen Spektrums ermöglichen würde.

Mit den im Handel befindlichen Erzeugnissen werden oft zufriedenstellende farbige Bilder erzielt. Trotz sorgfältigster Durchführung der farbenphotographischen Verfahren gibt es aber in gewissen schwierigeren Fällen völlige Versager, insbesondere bei der Farbaufnahme eines Spektrums. Die vorliegende Abhandlung befaßt sich mit den Ursachen dieser Versager und mit den naturbedingten Grenzen der Leistungsfähigkeit der üblichen Dreifarbenverfahren. Es wird ferner angegeben, durch welche Abänderungen eine Verbesserung möglich ist. Die Abhandlung soll das Problem der richtigen Farbenwiedergabe vom Standpunkt der physiologisch-physikalischen Farbenlehre behandeln und in den Kreisen der reinen Techniker, bei denen viel irrige Meinungen verbreitet sind, aufklärend wirken.

Für die Beschäftigung mit dem Problem der naturgetreu erscheinenden Farbenwiedergabe genügen nicht technische und physikalische Kenntnisse allein; es sind vielmehr auch solche aus dem Gebiet der physiologischen Optik erforderlich. (Analog muß z. B. der technische Spezialist für Elektroakustik auch Kenntnisse aus dem Gebiet der physiologischen Akustik haben.) Vor der Inangriffnahme des Problems ist es daher nötig, etwas über die beim technischen Unterricht kaum angedeutete physiologische Farbenlehre anzugeben. Wie in jeder Naturwissenschaft, bilden Versuche die Grundlage. Vorerst die Versuche über die Mischung farbiger Lichter, die sog. additive Farbmischung. Man fand als Versuchsergebnis, daß es zwischen vier farbigen Lichtern stets eine Mischungsbeziehung gibt (sofern nicht der wenig wahrscheinliche Sonderfall einer Mischungsbeziehung innerhalb einer Gruppe von drei der vier gegebenen Farben vorliegt). Jede Mischungsbeziehung kann durch eine Farbgleichung dargestellt werden, die sich wie eine lineare Vektorgleichung verhält. In der Farbgleichung wird jede Farbe durch ein Symbol, zweckmäßig in gleicher Weise wie ein Vektor, bezeichnet; also mit einem fett gedruckten oder überquerten Buchstaben oder durch Anwendung von Frakturbuchstaben<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Die in der Tensorrechnung vielfach übliche, fälschlich oft symbolfrei genannte Bezeichnungsweise, bei der ein Vektor  $\vec{F}$  in gleicher Weise wie seine Koordinate  $F_i$  nur durch einen Buchstabenindex bezeichnet wird, hat sich in der Farbenlehre als wenig zweckmäßig erwiesen. Man hat oft mit Farbtupeln zu tun, wobei man den  $k$ -ten Vektor des Tripels mit  $\vec{F}_k$  und seine  $i$ -te Koordinate mit  $F_{ki}$  bezeichnet. Doppelindizes kennzeichnen aber in der erwähnten Tensor Schreibweise nur die Konstanten einer Transformationsmatrix. Es hat sich aber oft als zweckmäßig erwiesen, für die Matrix ein Symbol ohne Indizes zu benutzen. Zum Unterschied von einem Vektor wählt man oft große griechische Buchstaben. Sehr zweckmäßig und auch leicht bei der Schreibmaschine sowie bei der Setzmaschine anwendbar hat sich die Bezeichnungsweise nach F. Jung erwiesen, der Vektoren durch einfache Überquerung und Dyaden bzw. Matrizen durch Doppelüberquerung bezeichnet (Triaden durch dreifache usw.). Für die Setzmaschine wäre auch die folgende Schreibweise möglich: Vektoren durch fette (oder halbfette) kleine und Matrizen durch fette große Buchstaben. In der vorliegenden Abhandlung wird vorwiegend die Jungsche Bezeichnungsweise benützt.

In einer Farbgleichung steht vor jedem Farbsymbol im allgemeinen noch ein Zahlenfaktor (Skalar). Beim Mischungsergebnis zweier gleicher Farblichter ist es die Zahl 2. Der Faktor wächst linear mit der Energiezunahme des Farblichtes. Nach dem vorhin über die Ergebnisse der Farblichtermischungen Angegebenen hat man also allgemein eine implizite Farbgleichung

$$a_k \bar{F}_k = 0, \quad (1)$$

wobei über den Index  $k$  von 1 bis 4 summiert wird. (Sofern im Einzelfall nicht ausdrücklich das Gegenteil angegeben, ist ein Buchstabenindex, der in einem Produkt zweimal vorkommt, Summationsindex.) In (1) sind die Konstanten  $a_k$  zum Teil negativ.

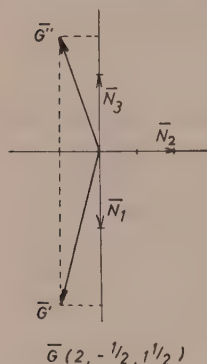


Abb. 1. Grund- und Aufriß eines Farbvektors  $\bar{G}$

Die Glieder von (1) mit negativen Konstanten werden nun auf die rechte Gleichungsseite gebracht (wobei sie positiv werden). Es ergeben sich nun zwei Möglichkeiten: 1. Auf einer Gleichungsseite steht ein Glied und auf der anderen drei Glieder. In diesem Fall kann die eine Farbe durch entsprechend dosierte Mischung der drei anderen nachgebildet werden. 2. Je zwei Glieder stehen auf jeder Gleichungsseite, was bedeutet, daß eine Mischung zweier Farben einer Mischung der anderen beiden Farben gleich aussehend gemacht werden kann. In diesem Falle kann also keine der vier Farben einer Mischung der drei anderen gleich aussehend gemacht werden. Die weniger bekannte Tatsache, daß auch der Fall 2 auftreten kann, ist eine der Ursachen dafür, daß die Dreifarbenreproduktion nicht in allen Fällen eine richtige Wiedergabe ermöglicht. Praktisch brauchbar kann also nur der Fall 1 sein, und zwar nur dann,

wenn die wiederzugebende Farbe allein auf einer Gleichungsseite steht und in der Gleichung kein negatives Vorzeichen vorkommt.

Man wählt nun drei bei den weiteren Untersuchungen unverändert belassene sog. Bezugsfarben  $\bar{B}_i$  zwischen denen es keine Mischungsbeziehung gibt. Es sei nun  $\bar{F}$  irgendeine zu messende Farbe. Dann kann die (1) entsprechende Mischungsbeziehung zwischen diesen vier Farben auch in der Form

$$\bar{F} = F_i^B \bar{B}_i \quad (2)$$

geschrieben werden, wobei der Summationsindex  $i$  von 1 bis 3 läuft. Die (positiven oder negativen) Konstanten  $F_i^B$  sind die „Farbmaßzahlen“ (im  $B$ -System), wobei im Falle des Normsystems der obere Index weggelassen wird. Man hat dann

$$\bar{F} = F_1 \bar{B}_1 + F_2 \bar{B}_2 + F_3 \bar{B}_3. \quad (2)$$

Diese Gleichung kann man als Vektorgleichung auffassen und mit Hilfe der darstellenden Geometrie graphisch darstellen, indem man den  $\bar{B}_i$  ein im allgemeinen schiefwinkeliges Vektordreieck zuordnet. Abb. 1 zeigt ein Beispiel, bei dem ein rechtwinkliges Normbezugstripel  $\bar{N}_i$  gewählt wurde. Auf diese Weise kann jeder Farbe ein Farbvektor in einem „Farbraum“ zugeordnet werden. Die  $F_i$  nennt man auch Farbkoordinaten oder Farbwerte.

Wird die Helligkeit (Leuchtdichte in Kerzen pro Quadratmeter) einer Farbe, nicht aber die „Farbart“ geändert, dann ändert sich nur die Länge, nicht aber auch die Richtung des Farbvektors. Damit wird auch die Bedeutung eines Zahlenfaktors vor einem Farbvektor verständlich.

Es werden nun die einzelnen Farben eines bezüglich der Wellenlängenskala isoenergetischen Normspektrums gemessen, dessen hellste Stelle (bei 555 nm) die Leucht-



dicke 1 K/m<sup>2</sup> hat. Alle seine Wellen gemischt ergeben das Normweiß  $E_0$ . Als Bezugsfarben bzw. Eichfarben wählt man zweckmäßig die Spektrallichter Hg 436, Hg 546, Cd 644 nm, die unmittelbar gemischt, Normweiß ergeben würden. Als Ergebnis erhält man die  $S_i^B$  bzw.  $\bar{S}(\lambda)$ . Die Spitzen dieser Farbvektoren bilden die Spektralraumkurve. Sie liegt auf einer (allgemeinen) Kegelfläche, die durch die Spektralvektoren gebildet wird. Hat man nun ein Farblicht mit der spektralen Strahldichteverteilung (Energieverteilung)  $F(\lambda)$ , so ist es nun einleuchtend, daß dazu der Farbvektor

$$\vec{F} = C \int F \bar{S} d\lambda \quad (3)$$

gehört, wobei  $C$  eine Konstante ist. Da der Kegel überall nach innen konkav ist, muß der Farbvektor jeder reellen Farbe innerhalb dieses Kegels liegen.

Läßt man nun ein Farblicht auf drei Photozellen mit verschiedener spektraler Empfindlichkeitsverteilung  $P_k(\lambda)$  fallen, so erhält man drei elektrische Spannungen (bzw. Ströme), die unter gewissen Voraussetzungen Farbkordinaten darstellen können, aber stets positiv sind. Das Gebiet der reellen Farben, also der gesamte Spektralkegel, muß innerhalb des durch die entsprechenden Bezugsvektoren  $\bar{A}_k$  gebildeten Dreikants liegen. Eine einfache Überlegung ergibt, daß

$$P_k \bar{A}_k = \bar{S} = S_i^B \bar{B}_i \quad (4)$$

sein muß, wenn man durch die Photozellen wirkliche Farbraumkoordinaten gewinnen will. Haben die Photozellen (bzw. die mit den entsprechenden Meßfiltern versehenen Photozellen) von dieser „Luther-Bedingung“

$$P_k = S_k^A \quad (5)$$

(nach Prof. Luther) abweichende Kurven, so sind sie für eine solche Farbmessung unbrauchbar. Gleich aussehende Farben mit verschiedener spektraler Energieverteilung, sog. bedingt-gleiche Farben, hätten verschiedene Farbmaßzahlen.

Beim Farbensinn sind nun tatsächlich drei Sehstoffe (und ein weiterer für das Dämmerungssehen) vorhanden, die sich wie die drei Photozellen verhalten und die spektralen Grundfarbenempfindlichkeiten  $G_j(\lambda)$  haben, wobei selbstverständlich  $G_j = S_j^G$  ist. Dazu gehören die physiologischen Grundfarbenvektoren  $\bar{G}_j$ . Auch die drei Aufnahmeschichten der Dreifarbenreproduktion verhalten sich wie die drei Photozellen. Der Photozellenspannung entspricht die Exposition bzw. die Transparenz des positiven Dreifarbenauszugs, nämlich  $T_{Pk}$  (sofern mit dem richtigen Kontrast kopiert wurde). Die spektrale Empfindlichkeitsverteilung der (mit den Dreifarbenauszugs-Aufnahmefiltern versehenen) Aufnahmeschichten muß also ebenfalls  $S_k^A(\lambda)$  sein, das heißt es müssen die Aufnahmefilter die Luther-Bedingung erfüllen.

Die Farbaufnahme muß also stets eine einwandfreie Farbmessung darstellen, was durch die Erfüllung der Luther-Bedingung ermöglicht wird. Man hat

$$S_k^A \bar{A}_k = S_j \bar{N}_j. \quad (6)$$

Die Normbezugsvektoren  $\bar{N}_j$  liegen beim Internationalen CIE-System im Gebiet der virtuellen Farben und die  $S_j$ -Kurven (Abb. 2) sind tabellarisch gegeben. Da die eine  $S_j$ -Kurve ein Nebenmaximum hat und sich ein Nebenmaximum bei Filterkurven schwer realisieren läßt, macht man das Tripel der  $\bar{A}_k$  verschieden von dem Tripel der  $\bar{N}_j$ . Die  $P_k = S_k^A$ -Kurven sind dann lineare Kombinationen der  $S_j$ -Kurven, zweckmäßig nach Abb. 3. Die Ordinaten sind das Produkt aus Schichtempfindlichkeit und Aufnahmefiltertransparenz. Die Konstanten der linearen Kombination (bzw. der Luther-Bedingung) bilden eine Matrix  $a$ , die kontragredient ist zur Matrix  $A$ , die aus den Koordinaten der  $\bar{A}_k$  gebildet wird.

Bei der farbenphotographischen Aufnahme der Farbe  $\bar{F}$  hat man  $F_k^A = T_{Pk}$  und bei der Wiedergabe  $F_i^B = T_{Pi}'$ . Man muß die reellen Wiedergabegrundfarben (die meist einem Drittel des Spektrums entsprechen) durch die den Wiedergabe-Positivtransparenzen entsprechenden Dosierungen  $T_{Pk}'$  steuern. Man hat also

$$\bar{F} = F_k^A \bar{A}_k = F_i^B \bar{B}_i. \quad (7)$$

Das Tripel der  $\bar{A}_k$  ist aus den vorhin angegebenen Gründen virtuell und das

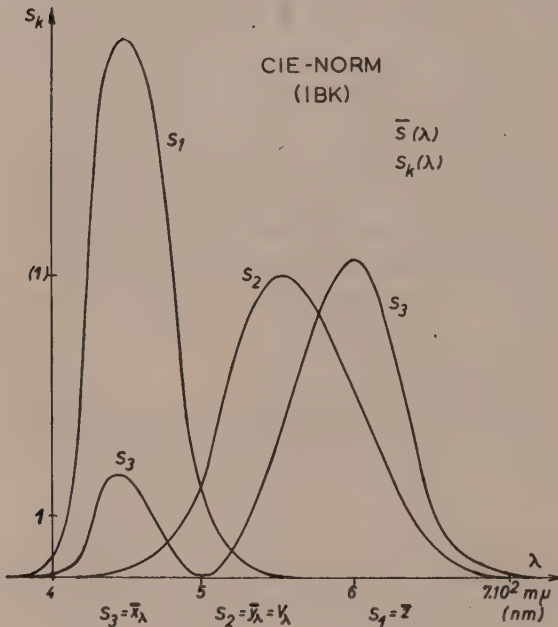


Abb. 2. Normspektralwertkurven

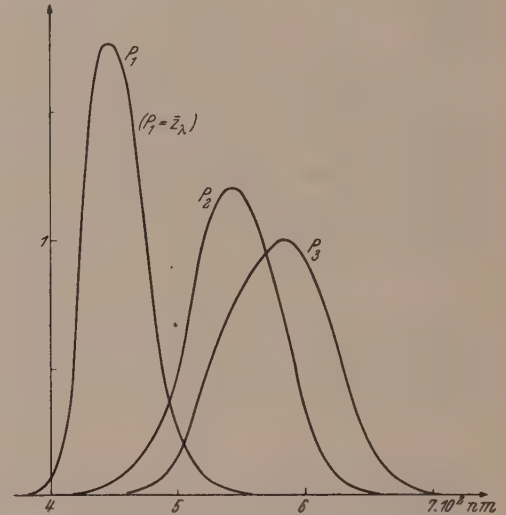


Abb. 3. Aufnahmegrundfarben (spektrale Empfindlichkeitswertverteilung)

der  $\bar{B}_i$  reell. Man hat daher eine Transformation von dem einen Bezugssystem in das andere. Für die Koordinatentransformation hat man die Matrix  $\bar{V}$  anzuwenden. Es ist

$$F_i^B = V_{ik} F_k^A, \quad (8)$$

wobei

$$\bar{V} = (\bar{A} \bar{B}^{-1})_0 \quad (9)$$

ist, nach bekannten Regeln der Tensorrechnung. Für die Matrizen bzw. Dyaden wurde hier zum Unterschied von Vektoren die doppelte Überquerung gewählt. (Auch große griechische Buchstaben werden benützt.) Die Gl. (8) könnte man auch in der Form

$$\bar{F}^B = \bar{V} \bar{F}^A \quad (8')$$

schreiben. Es darf daher  $T_{Pk}'$  nicht mit  $T_{Pk}$  übereinstimmen, wie dies beim gewöhnlichen unkorrigierten additiven Verfahren der Fall ist.

Bei dem durch ein sog. „verzweigtes Verfahren“ korrigierten additiven Verfahren sind die korrigierten Positivtransparenzen  $T_{Pi}'$  lineare Kombinationen (mit teilweise negativen Konstanten) der unkorrigierten Positivtransparenzen  $T_{Pk}$ . Beim analogen korrigierten Farbfernseher sind die Steuerspannungen der Wiedergabegrundfarben lineare Kombinationen der drei Photozellenspannungen. Es können alle Farben richtig wiedergegeben werden, die sich innerhalb des Dreikants der Wiedergabegrundfarben befinden, die man daher möglichst satt wählen wird. Man wird also möglichst reine Spektrallichter 436, 546 (oder besser Tl 535), 644 nm wählen.



Hätte man für das subtraktive Verfahren ideale, nur ein Drittel des Spektrums absorbierende Zweizonenfarben Gelb, Purpur, Eisblau (Cyanblau), die in den anderen beiden Dritteln des Spektrums keine Nebenabsorptionen haben, dann wäre es dem additiven Verfahren äquivalent. Die blauviolette Wiedergabegrundfarbe  $\bar{B}_1$  sollte nur durch den Gelbfarbstoff allein gesteuert werden, was aber nicht der Fall ist. Wegen der Nebenabsorption des Purpurfarbstoffes im Blaudrittel trägt derselbe auch zu einer zusätzlichen Blaulichtsteuerung bei. Es ist nun naheliegend, die Gelbkonzentration proportional der Purpurkonzentration durch ein sog. „Maskenverfahren“ herabzusetzen. Analog bei der Kompensation anderer Nebenabsorptionen.

Bei Anwendung eines trichromatischen Weiß kann das subtraktive Verfahren exakt auf ein äquivalentes additives zurückgeführt werden. Man geht dabei aus von den für das additive Verfahren korrigierten drei Einzeldiapositiven, deren Transparenzen die  $T_{P_i}'$  sind. Ihre Schwärzungen sind die  $S_i' = -\lg T_{P_i}'$ , die zu dem Hilfsvektor

$$\bar{S}' = -\lg \bar{T}' \quad (10)$$

zusammengefaßt werden können. (Die Definition der Funktion eines Vektors ist hier zu beachten!) Man stellt nun ein neues Tripel von Diapositiven her, dessen Schwärzungsvektor

$$\bar{S}'' = \bar{M} \bar{S}' \quad (11)$$

ist. Dazu kann das sog. Maskenverfahren nach E. Albert benützt werden. In jedem dieser Diapositive wird das Silber durch je einen Farbstoff ersetzt, so daß z. B. die Flächenkonzentration des Gelbfarbstoffes  $c_1 = H_1 S_1''$  ist. Analog für Purpur und Eisblau. Man hat also

$$\bar{c} = \bar{H} \bar{S}''. \quad (12)$$

Nur die Glieder in der Hauptdiagonale der Matrix von  $\bar{H}$  sind von Null verschieden.

Der  $k$ -te Farbstoff hat bei  $c_k = 1$  für das  $i$ -te Grundfarbenlicht die Dichte  $D_{ki}$ . Die aufeinander liegenden drei Farbstoffschichten haben für das  $i$ -te Farblight die Gesamtdichte

$$D_i = D_{ki} c_k = D_{c i k} c_k. \quad (13)$$

Der Gesamtdichtevektor ist

$$\bar{D} = \bar{D}_c \bar{c}. \quad (14)$$

Für

$$\bar{D} = \bar{S}' \quad (15)$$

wird das subtraktive Verfahren dem additiven äquivalent.

Durch Zusammenfassung von (11) bis (15) erhält man

$$\bar{S}' = \bar{D} = \bar{D}_c \bar{c} = \bar{D}_c \bar{H} \bar{S}'' = \bar{D}_c \bar{H} \bar{M} \bar{S}' = \bar{I} \bar{S}'.$$

Es muß also

$$\bar{D}_c \bar{H} \bar{M} = \bar{I}, \quad (16)$$

also gleich dem Identitätsaffinor (Idemfaktor) sein. Daraus ergibt sich

$$\bar{M} = (\bar{D}_c \bar{H})^{-1} = \bar{H}^{-1} \bar{D}_c^{-1} = \bar{H}^{-1} \bar{d}, \quad (17)$$

womit man also die Nebenabsorptionen bzw. Nebendichtenkonstanten ( $D_{ik}$  für  $i \neq k$ ) kompensieren kann. Beim subtraktiven Verfahren hat man also die Matrix  $\bar{V}$  und die Matrix  $\bar{M}$  zu realisieren! (Auf diesen Umstand wurde vom Verfasser erstmalig klar hingewiesen.)

Es wird nun untersucht, ob  $V$  und  $\bar{M}$  nicht durch eine einzige Matrix ersetzt werden können. Es gilt

$$\bar{F}^A = \bar{A}_c^{-1} \bar{F} \quad (18)$$

und

$$\bar{F} = \bar{A}_c \bar{F}^A \quad (19)$$

und analog für  $B$ . Man hat also

$$\bar{F} = \bar{B}_c \bar{F}^B = \bar{B}_c \bar{T}' = \bar{B}_c \text{ antilog } (-\bar{D}) = \bar{B}_c \text{ antilog } (-\bar{D}_c \bar{H} \bar{M} \cdot -\log (\bar{V} \cdot \bar{A}_c^{-1} \bar{F})).$$

In der Klammer hat man

$$\bar{D}_c \bar{H} \bar{M} \log (\bar{V} \bar{A}_c^{-1} \bar{F}).$$

Wäre nicht  $\log$  zwischen  $\bar{M}$  und  $\bar{V}$ , so könnte man als Maskierungsmatrix die Produktmatrix  $(\bar{M} \bar{V})$  realisieren und würde sich die getrennte Anwendung eines verzweigten Verfahrens zur  $\bar{V}$ -Realisierung ersparen. Oder man könnte sich die Maskierung ersparen und dafür die Produktmatrix bei einem solchen Korrekturverfahren anwenden, wie es auch beim additiven Verfahren zur Korrektur benutzt wird.

Liegen jedoch alle wiederzugebenden Farben  $\bar{F} = \bar{F}_0 + \Delta \bar{F}$  in der Umgebung einer Farbe  $\bar{F}_0$ , so läßt sich die erwähnte Produktmatrix realisieren. Für jede Koordinate hat man den

$$\log (C + X) = \log (C (1 + x)) = \log C + \log (1 + x) \doteq \log C + x$$

zu bilden, wobei  $x = X/C$  klein ist. Benützt man natürliche (Nepersche) Logarithmen und bezieht alle Dichten (auch  $D$ ) auf diese, so hat man für die Koordinaten Ausdrücke der Form  $K + x$ . Man hat dann für  $\log (\bar{V} \bar{A}_c^{-1} \bar{F}) = \log (\bar{V} \bar{F}^A)$  die Form  $\bar{K} + W \cdot \Delta \bar{F}^A$ . Die Matrix  $W$  unterscheidet sich von der  $\bar{V}$ -Matrix dadurch, daß jede Zeile mit je einem Faktor multipliziert ist. Hier hat man das Produkt  $\bar{M} \cdot \bar{W}$  zu realisieren.

### Anwendung eines Bildtransformators

Die mit der Strahlenteilungskamera (oder nacheinander) aufgenommenen und (mit dem resultierenden Gamma  $G = 1$  im Kontakt) kopierten Diapositive  $\bar{S}$  werden von drei Photozellen  $PZ$  wie bei der Bildtelegraphie abgetastet. Der Vektor der drei Photozellenspannungen ist dann  $\bar{F}^A$ , der in das elektronische Rechengerät hineingesteuert wird. Das Gerät liefert drei Spannungen zum Steuern dreier Kopierbelichtungs Lampen  $LQ$ , so daß ihre Helligkeiten  $\bar{T}'' = \text{antilog } (-\bar{S}'')$  entsprechen. Der Rechenautomat hat also

$$\bar{T}'' = \text{antilog } (-\bar{M} (-\log (\bar{V} \bar{F}^A))) \quad (20)$$

zu bilden, wobei die Minuszeichen wegfallen. Man erhält so vorerst für das subtraktive Verfahren korrigierte Negative. Eine Kontaktkopierung derselben liefert die nun voll korrigierten Diapositive, deren Silber dann durch Farbstoff ersetzt wird. Bei diesem Kontaktkopieren muß aber im allgemeinen mit dem resultierenden Gamma gleich Eins kopiert werden. Werden davon abweichende Gammawerte benutzt, ist dies gleichbedeutend mit einer Änderung von  $\bar{H}$ .

Die Abb. 4 zeigt das Blockschema des zum Bildtransformator gehörenden elektronischen Rechengerätes. Die bei der Durchleuchtung und bildpunktweisen Abtastung



der unkorrigierten Auszugsdiapositive erhaltenen Photozellenspannungen (denen der Hilfsvektor  $\bar{F}^A$  zugeordnet ist) werden links in das die Matrix  $\bar{V}$  realisierende Gerät Abb. 5 hineingesteuert, das die Farbraumkoordinatenumwandlung bewirkt. Die Konstanten  $V_{ik}$  können durch neun Justierdrehknöpfe eingestellt werden. Dieses

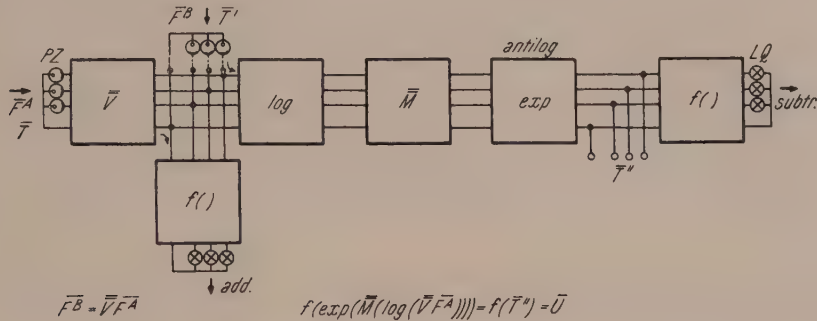


Abb. 4. Bildtransformator

$\bar{V}$ -Gerät liefert Spannungen, die für die Kopierlampensteuerung zum Kopieren der für das additive Wiedergabeverfahren korrigierten Auszüge dienen. Daß die Helligkeit einer Lampe im allgemeinen nicht der Lampenspannung  $U$  proportional ist,

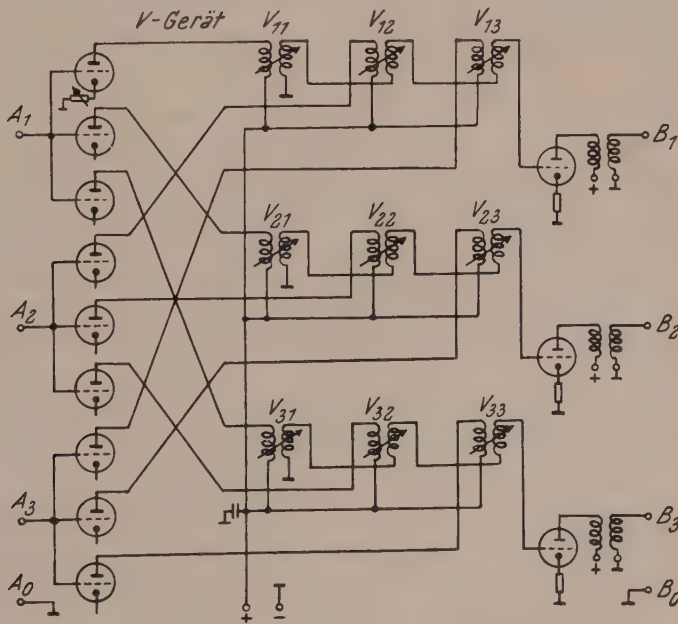


Abb. 5. Matrixnachbilder

muß noch durch ein eigenes Gerät  $f(\bar{F}^B)$  gebildet werden, das weiter unten gezeichnet ist. Erst dieses  $f$ -Gerät steuert dann die Belichtungslampen, die mit dem üblichen Symbol für Glühlampen eingezeichnet sind (trägheitslosere Glimmlampen wären hier vorzuziehen). Hat man bereits für das additive Verfahren korrigierte Diapositive, so kann man diese statt der unkorrigierten durch Photozellen abtasten und die Photozellenspannungen bei den Klemmen  $\bar{F}^B$  hineinsteuern und sie statt der aus dem

V-Gerät entnommenen dem Logarithmiergerät log zuführen. Nach dem log-Gerät kommt wieder ein Matrizennachbilder, und zwar für  $M$  (mit neun Justierdrehknöpfen für die  $M_{ik}$ ). Dann kommt ein Antilogarithmiergerät (antilog), das Spannungen liefert, zu denen der Hilfsvektor  $\bar{T}''$  gehört. Zum Schluß kommt wieder ein  $f$ -Gerät, das Belichtungslampen steuert für die für das subtraktive Verfahren korrigierten Auszüge. 18 Zahlenwerte sind justierbar, da ja zwei Matrizen zu realisieren sind. Je nach den Aufnahmegrundfarben, den Wiedergabegrundfarben und den Farbstoffen des subtraktiven Verfahrens kann nun der Bildtransformator richtig justiert werden. Weitere Hilfseinrichtungen können das unmittelbare Abtasten der ursprünglichen Auszugsnegative ermöglichen. Ebenso wäre es auch möglich, unmittelbar durch den Bildtransformator die korrigierten Diapositive (statt der entsprechenden Negative) zu belichten. (Erster Bildtransformator von Siemens & Halske, F. Fischer 1936.)

Auch für den Dreifarbendruck (mit und ohne zusätzlichen Graudruck), der in gewissem Sinne ein gemischt additiv-subtraktives Verfahren darstellt, gibt es Bildtransformatoren, die die so lästige Retusche überflüssig machen (so daß sie höchstens für die letzte Feinbearbeitung in Frage kommt). Der Bildtransformator leistet mehr als das Maskierungsverfahren (das erst in letzter Zeit größere Verbreitung finden konnte).

Es wurden insbesondere vom Verfasser mehr oder weniger automatisch arbeitende Mehrfarbenverfahren entwickelt, die eine wesentliche Erweiterung des Bereiches der richtig wiedergebbaren Farben zu noch höheren Sättigungen hin ermöglichen, so daß bereits eine hinreichend richtige Wiedergabe des gesamten sichtbaren reinen Spektrums ermöglicht wurde.

Wie die obigen mathematischen Untersuchungen ergeben haben, ist eine richtige subtraktive Wiedergabe bei Anwendung eines trichromatischen Betrachtungsweiß (bei nicht zu satten Farben) tatsächlich möglich. Bei einem gewöhnlichen Weiß wäre ein ganz wesentlich komplizierteres Rechengerät beim Bildtransformator nötig, das wenig Aussicht auf Einführung in die Praxis hätte. Der einfachere Bildtransformator ermöglicht bei zweckmäßiger, Kompromissen entsprechender Justierung auch beim gewöhnlichen Weiß, insbesondere der Xenonlampe, eine meist hinreichend gute Wiedergabe, zumindest eines Vollfarbenspektrums (von Oberflächenfarben).

Bei den üblichen Mehrschichtenfarbfilmen treten noch andere Fehlerquellen auf, die einen Bildtransformator sehr komplizieren würden. Eingebaute Farbmasken sind hier nur halbe Maßnahmen. (S. Österreichische Photozeitung 1956/11, S. 10, 12.)

Anmerkung bei der Korrektur: Beim Neuentwurf der Farbnormen ist die Möglichkeit vorgesehen, beim Farbvektor statt der Überquerung die Einklammerung anzuwenden. Für die Matrix käme dann die doppelte Klammer (oder eine eckige) in Betracht. Z. B. wäre dann  $(F)$  ein Farbvektor und  $((V))$  eine Matrix. Für die Spektralkurve wird statt des Buchstabens  $S$  der Buchstabe  $P$  vorgeschlagen, da  $S$  für die Stahldichte vorgesehen ist.

#### Literatur

W. Schultze: Farbenphotographie und Farbfilm (enthält ein reichhaltiges Literaturverzeichnis).

ÖTF, 1950, Hefte 5/6 und 7/8, Dreifarbenfernseher mit richtiger Wiedergabe.

Photographische Korrespondenz: 1954, H. 10 und 11 „Korrigiertes subtraktives Farbfilmverfahren“; 1955, H. 9 „Farbenreproduktionsverfahren mit  $m$  Aufnahme- und  $n$  Wiedergabegrundfarben“; 1956, H. 3 additives Verfahren.

(Eingegangen am 9. Januar 1957)



## Zu den Tanischen Grenzschichten

Von H. Görtler und H. Witting, Freiburg i. Br.

Mit 8 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Eine neue Methode<sup>1</sup> zur Berechnung stationärer, ebener und inkompressibler laminarer Grenzschichten bei allgemeinem äußerem Druckverlauf mit Hilfe einer formal exakten Lösung dieses allgemeinen Problems der Grenzschichttheorie in Gestalt einer unendlichen Reihe in besonders geeigneten Variablen wird dargestellt. Es wird gezeigt, daß diese Methode sich erneut besonders gut bewährt in Anwendung auf eine neuerdings von I. Tani untersuchte Klasse von Grenzschichtströmungen zu äußeren Geschwindigkeitsverteilungen der Gestalt  $U(x) = u_0 + u_n x^n$ . Nachdem bisher nur der Fall  $n = 1$  gelöst worden war (L. Howarth), ist die Abhängigkeit des Grenzschichtverlaufs und insbesondere der Ablösestelle von dem Exponenten  $n$  von besonderem praktischem Interesse bei der Beurteilung des Einflusses von Druckanstiegen auf den Strömungsverlauf.

Tani benutzte in enger Anlehnung an Howarth eine Reihenentwicklung vom Blasiuschen Typus (das heißt nach Potenzen der überströmten Wandbogenlänge) und eine auf plausiblen Annahmen beruhende approximative Fortsetzungsmethode dort, wo die verfügbaren Glieder der abgebrochenen Reihe wegen zu langsamer Konvergenz keine brauchbare Approximation mehr liefern.

Es wird gezeigt, daß auch im Falle der Tanischen Grenzschichten die Methode der neuen Reihe der Methode der Blasiuschen Reihe überlegen ist. Sie liefert mit wesentlich weniger Gliedern eine ebenso weitreichende gute Approximation, wie sie von Tani erzielt worden ist. Dort, wo auch die nach der neuen Reihe (beim gegenwärtigen Stand der Vertafelung der universellen Koeffizientenfunktionen) erzielbare Approximation stromabwärts nicht mehr ausreicht, wird eine sorgfältige Fortsetzungsrechnung mit der von den Verfassern früher entwickelten Differenzenmethode bis zur jeweiligen Ablösungsstelle angeschlossen. Es ergibt sich Ablösung der Grenzschicht durchweg etwas weiter stromabwärts als nach dem Howarth-Tanischen Fortsetzungsverfahren, jedoch beträgt die Abweichung nur wenige Prozent der von der Vorderkante an bis zur Ablösestelle insgesamt überströmten Wandbogenlänge, und sie ist von keinem praktischen Interesse.

### I. Einleitung

Für das allgemeine Problem der Berechnung laminarer Grenzschichten bei beliebig vorgegebenem äußerem Druckverlauf wurde kürzlich eine neue Methode entwickelt<sup>1</sup>. Sie beruht auf einer formal exakten Lösung dieses allgemeinen Randwertproblems der Grenzschichttheorie — zunächst für ebene und inkompressible Strömungen — in Gestalt einer unendlichen Reihe. Die durch die Wahl besonders geeigneter Variablen erzielten wesentlichen Vorteile der Methode wurden an einer größeren Zahl von Erprobungsbeispielen bestätigt<sup>1, 2</sup>. Insbesondere ist der Arbeitsaufwand bei der Anwendung dieser Methode nicht größer als derjenige der — wegen ihrer Einfachheit in der Praxis bisher bevorzugten — Parametermethoden vom Typus des Pohlhausen-Verfahrens. Diese Verfahren sind jedoch nicht streng begründet, vom Ansatz her ungenau und erfahrungsgemäß unzuverlässig.

Das neue Verfahren ist nicht nur anwendbar auf umströmte Konturen mit runder Nase, sondern allgemeiner auf Profile mit beliebigem Keilwinkel an der Vorderkante. Insbesondere sind auch — Vorderkantenwinkel Null — spitze Profile oder, was grenzschichttheoretisch auf dasselbe hinauskommt, Platten mit beliebigem äußerem Druckverlauf der Berechnung zugänglich. Neuerdings ist das Verfahren auch auf Probleme der Grenzschichtbeeinflussung durch Absaugung bei allgemeiner kontinuierlicher Verteilung der Absauggeschwindigkeit längs der Wand erweitert worden<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> H. Görtler: A new series for the calculation of steady laminar boundary-layer flows. *J. Math. Mechan.* 6, Nr. 1 (1957).

<sup>2</sup> H. Görtler und H. Witting: Einige laminare Grenzschichtströmungen, berechnet mittels einer neuen Reihenmethode. *Zschr. angew. Math. Physik*, erscheint in Kürze.

<sup>3</sup> H. Görtler: On the calculation of steady laminar boundary-layer flows with continuous suction. *J. Math. Mechan.* 6, Nr. 2 (1957).

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit einer gewissen Klasse von Grenzschichten an längs angeströmten Platten oder Profilen mit spitzer Vorderkante. Neben der seit den Anfängen der Grenzschichttheorie bekannten exakten Blasius'schen Lösung für die Platte bei konstantem äußerem Druck war bis in neuester Zeit nur eine einzige weitere Plattenströmung exakt behandelt worden, nämlich die Grenzschicht bei linear mit der überströmten Tiefe anwachsendem Druck. L. Howarth<sup>4</sup> hat diese Strömung mit Hilfe einer unendlichen Reihe nach Potenzen der überströmten Tiefe berechnet. (Neben der Lösung allgemeinerer Plattenströmungsprobleme in<sup>1</sup> und<sup>2</sup> ist in<sup>1</sup> dieser Fall des linearen Druckanstiegs nach der Methode der neuen Reihe erneut berechnet worden, weil die Howarthschen Ergebnisse eine willkommene Vergleichsmöglichkeit boten.) Die Howarthsche Reihe ist vom gleichen Typus wie die in der Literatur wohlbekannte Blasius'sche Reihe für Grenzschichten an Profilen mit runder Nase. Erst neuerdings ist uns bekanntgeworden, daß A. N. Tifford in einer nicht im Druck erschienenen Untersuchung<sup>5</sup> unter anderem die Howarthsche Reihe verallgemeinert hat für Plattenströmungen mit allgemeinem äußerem Druckverlauf. Veröffentlicht wurde jedoch vor kurzem eine Verallgemeinerung der Howarthschen Reihe auf eine Klasse einfacher nichtlinearer Druckverteilungen, die von I. Tani<sup>6, 7</sup> entwickelt und der numerischen Auswertung zugänglich gemacht worden ist. Diese einparametrische Schar von Lösungen hat uns eine sehr willkommene Möglichkeit geboten, die Leistungsfähigkeit der Methode der neuen Reihe zu vergleichen mit jener der von Tani verwendeten Reihe vom Blasius'schen Typus (Entwicklung nach Potenzen der überströmten Tiefe).

Die Klasse der Tanischen Grenzschichten stellt auf den ersten Blick eine für die Anwendung der Methode der neuen Reihe besonders ungünstige Klasse von Strömungen dar, wie weiter unten im einzelnen ausgeführt werden wird. Es hat sich aber gezeigt, daß sich die neue Reihe bei der Anwendung auf diese Strömungsklasse durch besonders günstiges Konvergenzverhalten ausweist, so daß der angedeutete Nachteil nicht zum Tragen kommt. Die neue Reihe erweist sich damit der Reihe vom Blasius'schen Typus erneut eindeutig überlegen.

## II. Kurze Darstellung der Methode der neuen Reihe

Um die Gesichtspunkte des Vergleiches verständlich zu machen, muß hier zunächst kurz die Methode der neuen Reihe beschrieben werden. Wir beschränken uns dabei auf die wesentlichen Züge.

Das Randwertproblem der — ebenen und stationären — Strömung in einer laminaren Grenzschicht einer inkompressiblen Flüssigkeit ist durch Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung

$$\left. \begin{aligned} u u_x + v u_y &= U(x) U'(x) + \nu u_{yy}, \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und die Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{für} \quad y = 0, \\ u \rightarrow U(x) & \quad \text{für} \quad y \sqrt{Re} \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq x \leq x_0) \quad (2)$$

<sup>4</sup> L. Howarth: On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 164, 547—579 (1938).

<sup>5</sup> A. N. Tifford: Heat transfer and frictional effects in laminar boundary layers. Part 4: Universal series solutions. Wright Air Development Center Technical Report 53-288 (August 1954).

<sup>6</sup> I. Tani: On the solution of the laminar boundary layer equations. J. Physic. Soc. Japan 4, 149—154 (1949).

<sup>7</sup> I. Tani: On the solution of the laminar boundary layer equations. „50 Jahre Grenzschichtforschung“, herausgegeben von H. Görtler und W. Tollmien. Braunschweig: Verlag Friedr. Vieweg u. Sohn. 1955.



im wesentlichen gegeben. Es kommt im allgemeinen Fall eine Anfangsbedingung (Einlaufbedingung im Anfangsquerschnitt  $x = 0$ ) hinzu, die jedoch bei Problemen mit singulärer Vorderkante  $x = 0$ ,  $y = 0$  durch die Vorschrift des (bekannten) Verhaltens der Lösung in der Umgebung von Vorderkanten (Staulinien, Plattenspitzen) beim Lösungsansatz ersetzt wird. In (1) und (2) bedeuten  $x$  die Wandbogenlänge, gemessen vom eben genannten vorderen singulären Punkt des Strömungsfeldes,  $y$  den senkrechten Abstand von der Wand,  $u$  und  $v$  die Geschwindigkeitskomponenten in der Grenzschicht in  $x$ - bzw. in  $y$ -Richtung,  $U(x)$  die vorgegebene äußere Geschwindigkeitsverteilung,  $\nu$  die konstante kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit und  $Re$  schließlich eine kennzeichnende Reynoldssche Zahl der Strömung.

Für die Methode der neuen Reihe ist die Einführung der folgenden neuen unabhängigen Koordinaten grundlegend:

$$\xi = \frac{1}{\nu} \int_0^x U(x) dx, \quad \eta = \frac{U(x)y}{\nu} \left/ \left\{ \frac{2}{\nu} \int_0^x U(x) dx \right\}^{1/2} \right. \quad (3)$$

Ist  $\psi(x, y)$  die vermöge  $\psi_y = u$ ,  $\psi_x = -v$ ,  $\psi(x, 0) = 0$  definierte Stromfunktion der Grenzschichtströmung, durch deren Einführung die zweite Gl. (1) (Kontinuitätsgleichung) befriedigt wird, so wird ferner als neue abhängige Variable die Funktion

$$F(\xi, \eta) = \psi(x, y) \left/ \left\{ 2\nu \int_0^x U(x) dx \right\}^{1/2} \right. \quad (4)$$

benutzt. In den Variablen (3), (4) geht das Grenzschichtproblem (1), (2) über in

$$F_{\eta\eta\eta} + F F_{\eta\eta} + \beta(\xi) \{1 - F_{\eta}^2\} = 2\xi \{F_{\eta} F_{\xi\eta} - F_{\xi} F_{\eta\eta}\} \quad (5)$$

mit den Randbedingungen

$$F(\xi, 0) = 0, \quad F_{\eta}(\xi, 0) = 0, \quad F_{\eta}(\xi, \infty) = 1 \quad (0 \leq \xi \leq \xi(x_0)). \quad (6)$$

In dieser Formulierung erscheinen die Vorgaben des jeweiligen speziellen Problems (äußere Geschwindigkeit und Stoffkonstanten) in (6) überhaupt nicht — die Randbedingungen sind „universell“ — und in der Differentialgleichung (5) erscheinen sie nur in der Koeffizientenfunktion

$$\beta(\xi) = 2 U'(x) \int_0^x U(x) dx / U^2(x). \quad (7)$$

Wegen ihrer zentralen Bedeutung für das Verfahren wurde diese Funktion als „Hauptfunktion der Grenzschicht“ bezeichnet.

Es wird vorausgesetzt, daß die Hauptfunktion eine im Grundintervall analytische Funktion von  $\xi$  ist, welche eine Reihenentwicklung

$$\beta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \xi^k \quad (8)$$

gestattet. Nach (7) bedeutet dies, daß für die äußere Geschwindigkeitsverteilung  $U(x)$  eine konvergente Entwicklung der Gestalt

$$U(x) = x^m \{u_0 + u_1 x^{m+1} + u_2 x^{2(m+1)} + \dots\} \quad (9)$$

mit  $m = \beta_0/(2 - \beta_0)$  und mit  $u_0 \neq 0$

möglich sein soll. Dabei kennzeichnet der Koeffizient  $\beta_0$  die Geometrie des Zylinders an der Vorderkante: Es ist  $\pi \beta_0$  der Keilwinkel der Kontur an der Vorderkante  $x = 0$ . Da wir uns in der vorliegenden Untersuchung nur für den Problemkreis mit spitzer

Vorderkante ( $\beta_0 = 0$ , somit  $m = 0$ ) interessieren, sind hier nach (9) alle äußeren Geschwindigkeitsverteilungen zugelassen, die sich überhaupt in eine konvergente Potenzreihe

$$U(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots \quad \text{mit } u_0 \neq 0 \quad (10)$$

mit sonst beliebigen Koeffizienten  $u_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) entwickeln lassen ( $0 \leq x \leq x_0$ ).

Für die gesuchte Lösungsfunktion  $F(\xi, \eta)$  wird die Entwicklung

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\eta) \xi^k \quad (11)$$

angesetzt, wie dies durch (8) und (5) nahegelegt ist. Einsetzen in (5) ergibt nach Koeffizientenvergleich ein rekursiv zu lösendes System von Differentialgleichungen für  $F_0, F_1, F_2, \dots$ . Zunächst zeigt sich, was nicht überrascht, daß  $F_0(\eta)$  die bekannte Blasiusche Funktion der Plattengrenzschicht bei konstantem Druck ist, jetzt jedoch als Funktion der allgemeineren Variablen  $\eta$  nach (3), die nur im Blasiuschen Sonderfall  $U(x) = U_0 = \text{konst.}$  mit der von ihm benutzten Variablen übereinstimmt, im übrigen aber — was wieder nicht überrascht — in der Grenze  $x \rightarrow 0$  in diese übergeht. (In anderen Worten: In nächster Umgebung der Vorderkante stimmt die Grenzschichtlösung im allgemeinen Fall (10) approximativ mit der Blasiuschen Platten-grenzschicht überein.)

Die Randbedingungen (6) gehen über in

$$\left. \begin{aligned} F_0(0) = F_0'(0) = 0, \quad F_0'(\infty) = 1; \\ F_k(0) = F_k'(0) = F_k'(\infty) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Ein wesentlicher Vorteil der neuen Reihe gegenüber der Reihenentwicklung vom Blasiuschen Typus wird hier erkennbar: Das Glied nullter Ordnung der neuen Reihe erfüllt die äußere Randbedingung  $u \rightarrow U(x)$  bereits exakt für alle  $x$  (alle  $\xi$ ) des zugrunde liegenden Intervalls; die Blasiusche Reihe hingegen erfüllt diese Randbedingung durch Abgleichen, Glied für Glied, für  $\eta \rightarrow \infty$  mit den Gliedern der Reihe (10). (Für Einzelausführungen hierzu vgl. <sup>1</sup>.)

Zwischen den Koeffizienten  $\beta_k$  der Hauptfunktion und den Koeffizienten  $u_k$  der vorgegebenen äußeren Geschwindigkeitsverteilung bestehen gemäß (7) und (3) einfache Relationen, die in <sup>1</sup> für praktische Bedürfnisse angegeben sind. Mit ein paar Multiplikationen und Additionen sind damit die  $\beta_k$  ebenfalls gegeben.

Setzt man nun für die Funktionen  $F_k(\eta)$  Linearkombinationen nach folgender Bauart an:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \beta_1 f_1, \\ F_2 &= \beta_1^2 f_{11} + \beta_2 f_2, \\ F_3 &= \beta_1^3 f_{111} + \beta_1 \beta_2 f_{12} + \beta_3 f_3 \text{ usw.}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

so erweisen sich die Funktionen  $f_{..}(\eta)$  als Lösungen universeller Randwertprobleme. Man kann sie somit ein für allemal bis zu einer ausreichend hohen Ordnung und mit für alle Anwendungen genügender Genauigkeit vertafeln. Das ist für alle universellen Funktionen bis zur 5. Ordnung einschließlich geschehen. Neben den von der elektronischen Rechenanlage MARK IV (Harvard University) gelieferten umfangreichen Tafeln mit  $\eta$ -Werten in  $0(0.01)5.99$ , die Interessenten auf Wunsch zur Verfügung gestellt werden können, sind Auszüge mit einer für praktische Bedürfnisse ausreichenden Anzahl von  $\eta$ -Werten, nämlich  $0(0.2)6.0$  bereitgestellt worden<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> H. Görtler: Zahlentafeln universeller Funktionen zur neuen Reihe für die Berechnung laminarer Grenzschichten. Bericht Nr. 34 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (1957).



Man erkennt aus (13): Die Anwendung der Methode in jedem Einzelfall besteht nur noch im Ausrechnen der Kombinationen (13) oder von deren Ableitungen unter Verwendung der Tafeln. Für die lokale Wandschubspannung benötigt man, um ein Beispiel zu nennen, aus den Tafeln nur die Werte  $f''(0)$ , bildet daraus nach (13) rasch die  $F_k''(0)$  und hat damit mit den bis  $k = 5$  verfügbaren Tafeln nach (11) eine Polynomapproximation 5. Grades für die Wandschubspannung.

Der Wert des Verfahrens hängt von der Konvergenzgüte der Reihe (11) ab. In allen Beispielen von Plattenströmungen mit äußerem Druckanstieg, die bisher untersucht worden sind<sup>1, 2</sup>, reichte diese Approximation aus, um mit guter Genauigkeit die Grenzschicht in ihrem gesamten Verlauf von der Vorderkante  $x = 0$  bis unmittelbar vor der Ablösungsstelle zu berechnen.

### III. Die Tanischen Grenzschichten und deren Berechnung durch Tanis Reihen vom Blasiuschen Typus

Zur Zeit der Untersuchungen von I. Tani<sup>6</sup> war die soeben kurz zusammengefaßte Methode der neuen Reihe noch nicht bekannt, und dementsprechend waren insbesondere Plattenströmungen bei allgemeinem äußerem Druckverlauf noch nicht einer exakten Behandlung zugänglich. Indem Tani äußere Geschwindigkeitsverteilungen der Form

$$U(x) = u_0 + u_n x^n \quad \text{mit} \quad u_0 \neq 0, \quad n \geq 0 \quad (14)$$

seiner Arbeit zugrunde legte, war es sein Bestreben, über die zuvor allein exakt behandelten Sonderfälle  $n = 0$  (Blasius) und  $n = 1$  (Howarth) hinaus zu einer Klasse von nichttrivialen Grenzschichtströmungen vorzudringen, deren Verhalten wertvolle Aufschlüsse bei allgemeineren Überlegungen bieten könnte. Für  $u_n/u_0 < 0$  liegt Druckanstieg in Strömungsrichtung vor, und es interessierte, die Abhängigkeit der Ablösungsstelle vom Parameter  $n$  zuverlässig zu ermitteln. Tani hat die Fälle  $n = 2, 4$  und  $8$  numerisch ausgewertet.

Die von Tani benutzte Lösungsmethode ist eine unmittelbare Übertragung der von Howarth entwickelten Mittel. In Anlehnung an Howarth werden an Stelle von  $x$  und  $y$  die unabhängigen Veränderlichen

$$\sigma = 8 u_n x^n / u_0, \quad \tau = (y/2) \sqrt{u_0 / \nu x} \quad (15)$$

eingeführt. Der Lösungsansatz einer Potenzreihe vom Blasiuschen Typus, also nach Potenzen von  $x$ , reduziert sich bei der speziellen Vorgabe (14) auf eine solche nach Potenzen von  $x^n$ , also von  $\sigma$ . Für die Stromfunktion  $\psi(x, y)$  der Grenzschicht angeschrieben, lautet die Reihe formal:

$$\psi(x, y) / \sqrt{\nu x u_0} = \sum_{k=0}^{\infty} t_k(\tau) \sigma^k. \quad (16)$$

Es sei hier angemerkt, daß für den besonders interessierenden Fall des Druckanstieges über das Grundintervall  $0 \leq x \leq x_0$  wegen  $u_n/u_0 < 0$  in (15) die zugehörigen Werte von  $\sigma$  negativ sind.

Die Einführung des Ansatzes (16) in die Grenzschichtdifferentialgleichung liefert zusammen mit den Randbedingungen ein rekursiv zu lösendes System von Randwertproblemen für die Funktionen  $t_k$ . Dabei ist, wie zu erwarten,  $t_0(\tau)$  die bekannte Blasiusche Funktion der Plattengrenzschicht bei konstantem Druck. (Wegen der etwas verschiedenen Variablenwahl ist zwar  $t_0$  formal Lösung derselben Differentialgleichung wie  $F_0$ , aber die um den Faktor 2 verschiedenen Variablen bedingen, daß z. B.  $t_0'(\tau) = 2 F_0'(\eta)$  wird, wo Striche Ableitungen nach den zugehörigen Variablen bezeichnen.)  $t_0(\tau)$  erfüllt die Randbedingungen  $t_0(0) = t_0'(0) = 0$ ,  $t_0'(\infty) = 2$ .

In den Differentialgleichungen für die Funktionen  $t_k(\tau)$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$  erscheint der Parameter  $n$  der zugrunde liegenden äußeren Geschwindigkeiten (14) explizit in den Koeffizienten. Somit ist das System der Funktionen  $t_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) für jedes spezielle  $n$  erneut zu berechnen:  $t_k = t_k(\tau; n)$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Das zwingt zur Beschränkung der numerischen Auswertungen auf eine Auswahl von  $n$ -Werten.

Die Randbedingungen für die  $t_k$  lauten gemeinsam für alle  $n$

$$\left. \begin{aligned} t_k(0) = t_k'(0) = 0 & \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \dots; \\ t_1'(\infty) = 1/4, \quad t_k'(\infty) = 0 & \quad \text{für} \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Man erkennt, daß die äußere Randbedingung  $u \rightarrow U$ , das heißt  $u/u_0 \rightarrow 1 + \sigma/8$  für  $\tau \rightarrow \infty$  von der Blasius-Reihe (16) für die vorgegebene Klasse (14) von äußeren Geschwindigkeiten bereits mit den zwei ersten Termen der Reihe exakt erfüllt wird, während die Terme höherer Ordnung am äußeren Rande der Grenzschicht keine Beiträge liefern. Somit ist beim vorliegenden Problemkreis die neue Reihe hinsichtlich der Erfüllung der äußeren Randbedingung (exakt bereits mit dem ersten Term der Reihe) in keinem wesentlichen Vorteil gegenüber der Blasius-Reihe von Tani; denn bei der praktisch notwendigen Beschränkung auf abgebrochene Reihen wird man immer wesentlich über zwei Glieder hinausgehen können.

Für die Fälle  $n = 2, 4, 8$  ermittelte Tani die folgenden Funktionen numerisch:

$$\begin{aligned} t_k(\tau; 2) & \quad \text{für} \quad k \leq 6, \\ t_k(\tau; 4) & \quad \text{für} \quad k \leq 5, \\ t_k(\tau; 8) & \quad \text{für} \quad k \leq 4. \end{aligned}$$

In Potenzen von  $x$  ausgedrückt, war damit die Reihe (16) für  $n = 2$  mit 7 Gliedern bis zum Gliede mit  $x^{12}$  verfügbar; entsprechend für  $n = 4$  mit 6 Gliedern bis zum Gliede mit  $x^{20}$ , für  $n = 8$  mit 5 Gliedern bis zum Gliede mit  $x^{32}$ . Die Konvergenzgüte erwies sich jedoch nicht als ausreichend, um damit die Grenzschicht in ihrem gesamten Verlauf bis zur Ablösungsstelle zu ermitteln. Tani mußte daher ein nicht streng zu rechtfertigendes Fortsetzungsverfahren anwenden; er schloß sich dabei wieder eng an das Vorbild von Howarth an.

Über die numerischen Ergebnisse wird im folgenden Abschnitt im Zusammenhang des Vergleiches mit den entsprechenden Ergebnissen der Methode der neuen Reihe berichtet.

#### IV. Berechnung der Tanischen Grenzschichten mit Hilfe der neuen Reihe und Vergleich der Leistungsfähigkeit beider Verfahren

Bei Anwendung der Methode der neuen Reihe hat man es bei allen äußeren Geschwindigkeiten der Gestalt  $U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$  mit  $u_0 \neq 0$ , insbesondere auch bei allen Tanischen Verteilungen  $U(x) = u_0 + u_n x^n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) formal mit ein und derselben Reihe zu tun, nämlich mit der Reihe, welche das System universeller Funktionen mit  $\beta_0 = 0$  besitzt. Dieses System ist gegenwärtig (siehe oben) bis zur Ordnung 5 einschließlich numerisch bereitgestellt.

In den folgenden Ausführungen bzw. Figuren erscheinen die dimensionslosen Größen

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x/L, \quad \bar{y} = y \operatorname{Re}^{1/2}/L, \quad \text{wo} \quad L = (-u_0/u_n)^{1/n} \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} = u_0 L/\nu; \\ \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) &= u(x, y)/u_0, \quad \bar{U}(\bar{x}) = U(x)/u_0 = 1 - \bar{x}^n; \\ \bar{\xi} &= \xi/\operatorname{Re}, \quad \bar{\beta}_k = \beta_k \operatorname{Re}^k \quad (\text{somit:} \quad \beta_k \xi^k = \bar{\beta}_k \bar{\xi}^k). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$



Die neue Reihe ist nach Potenzen von  $\bar{\xi}$ , somit nach (3) nach Potenzen von

$$\bar{\xi} = \bar{x} - \bar{x}^{n+1}/(n+1) \quad (19)$$

geordnet.

Die spezielle Gestalt von  $\bar{U}(\bar{x}) = 1 - \bar{x}^n$  hat zur Folge, daß von den Koeffizienten  $\beta_k$  der Hauptfunktion  $\beta(\xi)$  nur  $\beta_n, \beta_{2n}, \beta_{3n}, \dots$  von Null verschieden sind. Dadurch erhalten sehr viele universelle Funktionen den Koeffizienten Null in der Lösungsreihe. Angeschrieben für die Geschwindigkeitsprofile  $u(x, y)$  erhält man

$$u/U(x) = F_0' + \bar{\beta}_n f_n' \bar{\xi}^n + (\bar{\beta}_{n^2} f_{n^2}' + \bar{\beta}_{2n} f_{2n}') \bar{\xi}^{2n} + \dots \quad (20)$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die einleitend angekündigte Tatsache, daß die Klasse der Tanischen Grenzschichten für die Anwendung der neuen Reihe beim gegenwärtigen Stand der Vertafelung universeller Funktionen eigentlich ein ausgesprochen ungünstiges Übungsfeld bietet. Da für die allgemeine Reihe und damit auch für die spezielle Reihe (20) universelle Funktionen nur bis zur Ordnung 5 vertafelt vorliegen, haben wir nämlich für  $n = 1$  noch 6 Glieder von (20), für  $n = 2$  bereits nur 3 Glieder von (20), für  $n = 3, 4$  und 5 sogar nur 2 Glieder numerisch verfügbar.

Natürlich hätte man bei Beschränkung auf eine Untersuchung allein der Tanischen Grenzschichten auf die Fülle der in (20) nicht in Erscheinung tretenden Funktionen verzichten und dafür in (20) für spezielle  $n$ -Werte die numerische Vertafelung zu weit höheren Ordnungen mit angemessenem Aufwand führen können. (Es werden ja für jedes  $n$  jeweils neben  $F_0$  nur  $f_n, f_{2n}, f_{3n}, f_{4n}, \dots$  benötigt.) Das würde dem Vorgehen von Tani entsprechen. Da uns jedoch der numerische Zugang zu Problemen mit allgemeinem  $U(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots$  interessierte, ist das bisher nicht geschehen.

Überraschenderweise zeigt es sich, daß wir für die Fälle  $n = 2$  und  $n = 4$  von Tani bereits mit unseren wenigen Reihengliedern die Grenzschicht ebenso weit stromabwärts berechnen können, wie Tani mit wesentlich mehr Gliedern der Blasius-Reihe. Die Ergebnisse stimmen im Rahmen der Zeichengenauigkeit vollkommen miteinander überein. Dies ist zunächst eine sehr erfreuliche gegenseitige Bestätigung der numerischen Richtigkeit beider Ergebnisse. Darüber hinaus wird aber die wesentlich bessere Approximationsmöglichkeit mittels der neuen Reihe — nämlich mit erheblich weniger Gliedern als mit der Blasius-Reihe — überzeugend demonstriert.

Da bei den heute mit Hilfe der neuen Reihe numerisch in größerer Zahl<sup>1, 2</sup> berechneten und in weiterer Fülle bequem zugänglichen Strömungen dieser Art eine weitere Vertafelung der in (20) auftretenden Funktionen nicht lohnend erscheint, mußten auch wir ein Fortsetzungsverfahren anwenden, um von den Ergebnissen der wenigen Glieder der neuen Reihe (und damit der größeren Zahl von Gliedern der Tanischen Reihe) weiter stromabwärts bis zur Ablösungsstelle zu gelangen. Wir schlossen uns nicht dem Howarth-Tanischen Fortsetzungsverfahren an, sondern benutzten die von uns entwickelte Differenzenmethode der schrittweisen Fortsetzung<sup>9, 10</sup>. Diese ist zugleich neben sonstigen Proben (sog. „erste Grenzschichtbindung“ etwa) eine willkommene Kontrolle der Brauchbarkeit der von der Reihe her gelieferten Approximation. Indem man wesentlich weiter stromaufwärts zurückgeht mit dem Einsatz der Differenzenrechnung, als dies notwendig ist, kann man stromabwärts verfolgen, wie weit die vom Reihenverfahren gelieferte Approximation

<sup>9</sup> H. Görtler: Ein Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Ing.-Arch. 16, 173—187 (1948).

<sup>10</sup> H. Witting: Verbesserung des Differenzenverfahrens von H. Görtler zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Diss. Freiburg i. Br. (1953); Z. angew. Math. Physik 4, 376—397 (1953).

brauchbar bleibt und von wo an stromabwärts ins Gewicht fallende Abweichungen einzusetzen beginnen. Unsere weniggliedrigen Ergebnisse sind somit nicht nur in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der mehrgliedrigen Tanischen Reihe, soweit diese nach Tani eine brauchbare Approximation bieten, sie sind vielmehr auch mit Hilfe der Differenzenmethode unabhängig von den Tanischen Ergebnissen sorgfältig kontrolliert und zuverlässig fortgesetzt worden.

Neben den Tanischen Fällen  $n = 2$  und  $n = 4$  und dem Howarth'schen Fall  $n = 1$  (über den wir ausführlicher schon in <sup>1</sup> berichtet haben) haben wir auch die Fälle  $n = 3$

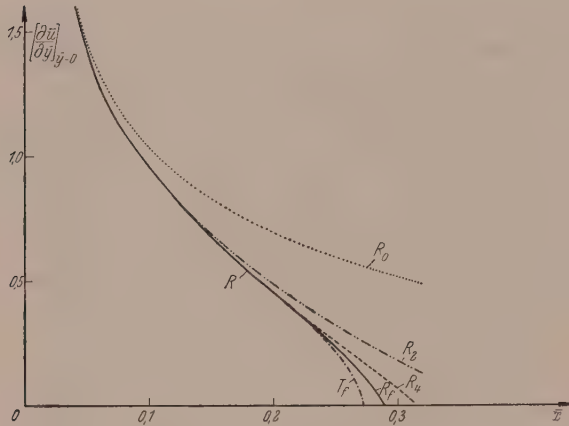


Abb. 1. Verlauf der lokalen Wandschubspannung für den Fall  $n = 2$  ( $\bar{U} = 1 - \bar{x}^2$ ).  $R$  und Fortsetzung  $R_f$  (ausgezogene Kurve) Ergebnis der neuen Reihe ( $R$ ) und des Differenzen-Fortsetzungsverfahrens ( $R_f$ ).  $R_4$  Ergebnis der Approximation 4. Ordnung in  $\xi$  (3 Glieder der neuen Reihe) dort, wo sie keine ausreichende Näherung mehr bietet.  $R_2$  und  $R_0$  entsprechende Ergebnisse der Approximationen 2. Ordnung (2 Glieder der neuen Reihe) und 0. Ordnung (1 Glied).  $T_f$  Tanische Fortsetzung dort, wo die Approximation durch die ersten 7 Glieder seiner Reihe (die bis dahin mit  $R$  übereinstimmt) unbrauchbar wird

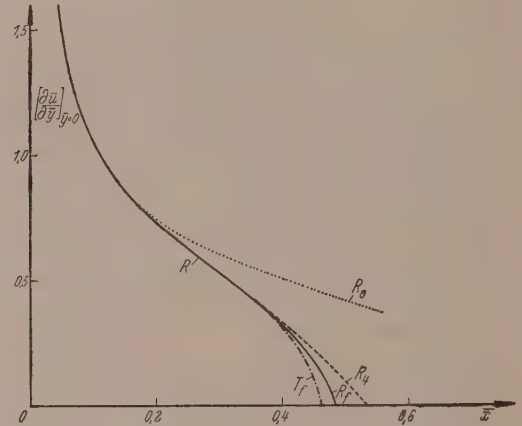


Abb. 2. Verlauf der lokalen Wandschubspannung für den Fall  $n = 4$  ( $\bar{U} = 1 - \bar{x}^4$ ). Beschriftung entspricht jener von Abb. 1. Hier ist jedoch  $R_4$  nur eine 2gliedrige Approximation durch die neue Reihe. Sie leistet das gleiche wie die ersten 6 Glieder der Tanischen Reihe

und  $n = 5$  ausgewertet. Wir berichten nun über Einzelheiten der numerischen Ergebnisse.

In Abb. 1 ist zunächst für den Fall  $n = 2$ , somit für  $\bar{U} = 1 - \bar{x}^2$ , der Ver-

lauf der örtlichen Wandschubspannung dargestellt, sowohl in der nach dem gegenwärtigen Stand der Vertafelungen erreichbaren 3gliedrigen Approximation 4. Ordnung in  $\xi$  (Kurve  $R_4$ ), als auch in der vor der Ablösungsstelle verbesserten Berechnung mit Hilfe des Differenzen-Fortsetzungsverfahrens (ausgezogene Kurve  $R_f$ ). Zur Demonstration der Konvergenzgüte sind ferner die Approximationen durch das 1. Glied der neuen Reihe allein (Approximation nullter Ordnung in  $\xi$ , Kurve  $R_0$ ) und durch die zwei ersten Reihenglieder (Approximation 2. Ordnung in  $\xi$ , Kurve  $R_2$ ) eingetragen. (Die Kurve  $R_0$  gibt zugleich den Verlauf der lokalen Wandschubspannung für die Blasius'sche Platte, das heißt bei konstantem äußerem Druck, wieder.) Schließlich zeigt in Abb. 1 die Kurve  $T_f$  das Ergebnis des Tanischen Fortsetzungsverfahrens dort wieder, wo das Tanische Reihenergebnis keine brauchbare Approximation mehr lieferte. Das Tanische Fortsetzungsverfahren stützt sich auf plausible, aber unbewiesene Annahmen über die vernachlässigten Glieder seiner Reihe mit dem Anspruch, eine brauchbare Approximation zu liefern. Man erkennt: Dort, wo unsere Approximation  $R_4$  mit drei Gliedern der neuen Reihe unbrauchbar wird, das heißt von  $R_f$  abzuweichen beginnt, mußte auch Tani mit seiner Fortsetzungsmethode einsetzen, um das bis dorthin



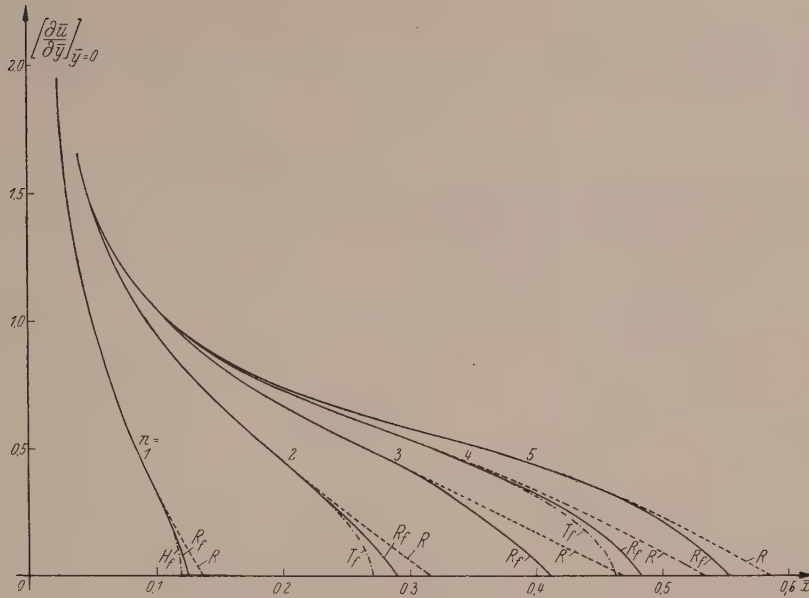


Abb. 3. Verlauf der lokalen Wandschubspannung für alle ausgewerteten Fälle ( $n = 1, 2, 3, 4$  und  $5$ ). — Ergebnis der neuen Reihe und der Fortsetzung ( $R_f$ ) mit Hilfe des Differenzenverfahrens. - - - - Ergebnis der neuen Reihe ( $R$ ) mit den ersten 6, 4, 2, 2 und 2 Gliedern im Bereich zu langsamer Konvergenz. ····· Ergebnis der Howarth'schen ( $H_f$  für  $n = 1$ ) und der Tanischen ( $T_f$  für  $n = 2$  und  $4$ ) Fortsetzung dort, wo ihre Reihe mit 9 ( $n = 1$ ), 7 ( $n = 2$ ), 6 ( $n = 4$ ) Gliedern keine ausreichende Approximation mehr liefert

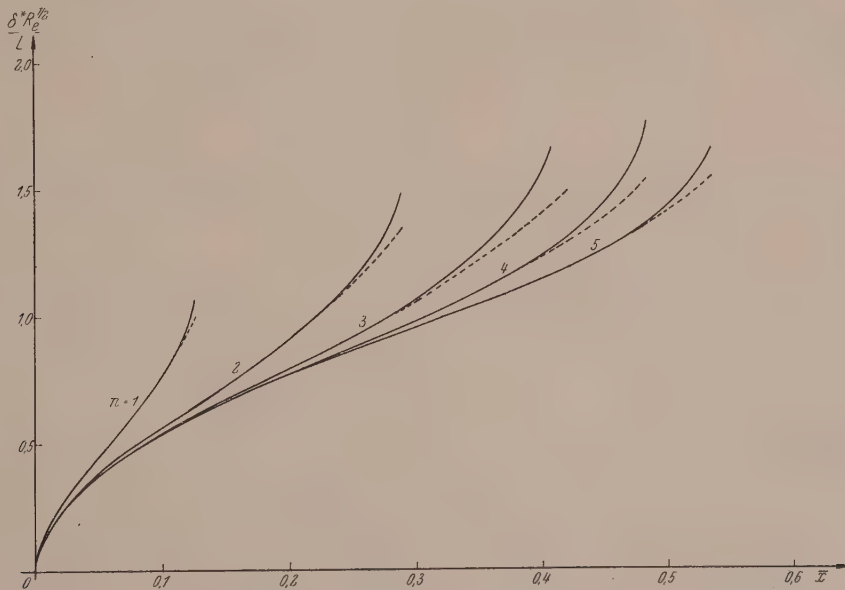


Abb. 4. Verlauf der Verdrängungsdicke  $\delta^*$  für  $n = 1, 2, 3, 4$  und  $5$ . — Ergebnis der neuen Reihe und der Fortsetzung mit Hilfe des Differenzenverfahrens. - - - - Ergebnis der Approximation mit 6, 3, 2, 2, 2 Gliedern der neuen Reihe im Bereich zu langsamer Konvergenz

mit unserem Ergebnis  $R_4$  übereinstimmende Ergebnis der ersten 7 Glieder seiner Reihe zu korrigieren. (Leider gibt Tani nur seine endgültigen Resultate an; man kann seinen Angaben nicht entnehmen, wie seine 7gliedrige Approximation nach Unbrauch-

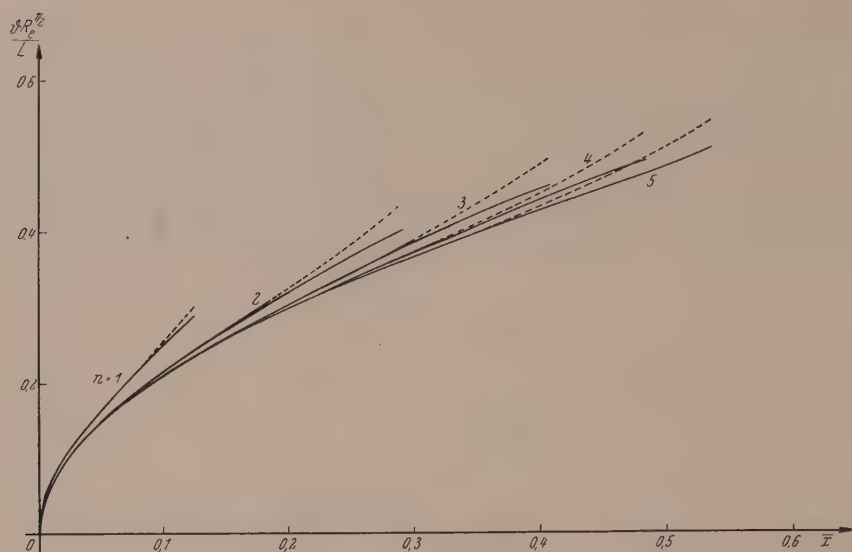


Abb. 5. Verlauf der Impulsverlustdicke  $\delta$  für  $n = 1, 2, 3, 4$  und  $5$ . — und - - - - - wie in Abb. 4

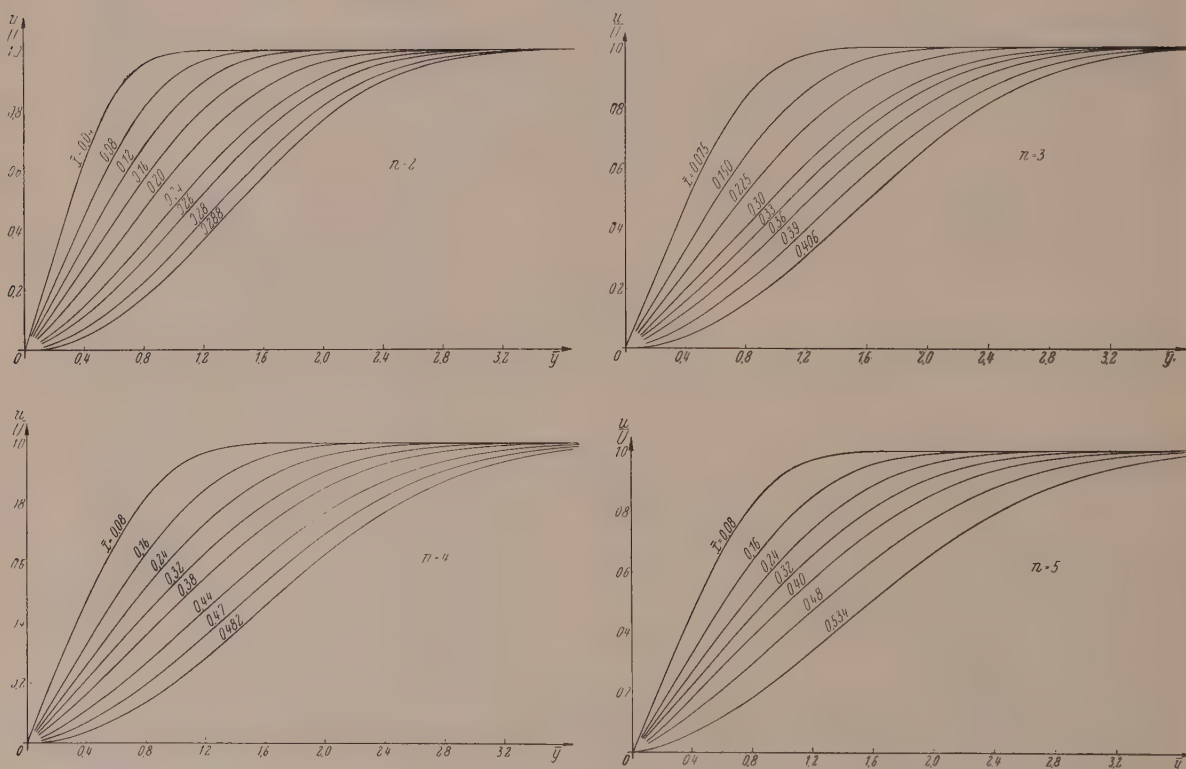


Abb. 6. Geschwindigkeitsprofile an einer Auswahl von festen Wandstellen  $\bar{x}$  für  $n = 2, 3, 4$  und  $5$

barwerden verläuft.) Somit leisten hier die drei ersten Glieder der neuen Reihe dasselbe wie die sieben ersten Glieder der Tanischen Reihe vom Blasius'schen Typus.

Im übrigen erkennt man aus Abb. 1, daß unsere mit erheblicher Sorgfalt mit der Differenzenmethode ermittelte Fortsetzung  $R_f$  eine etwas spätere Ablösung



( $\bar{x} = 0.290$ ) liefert als die Tanische approximative Fortsetzung  $T_f$  ( $x = 0.271$ ). Doch ist die relative Abweichung (zirka 6.5%) wohl nur von mathematischem Interesse. (In Nachbarschaft der Ablösungsstelle sind die durch die Vernachlässigungen der

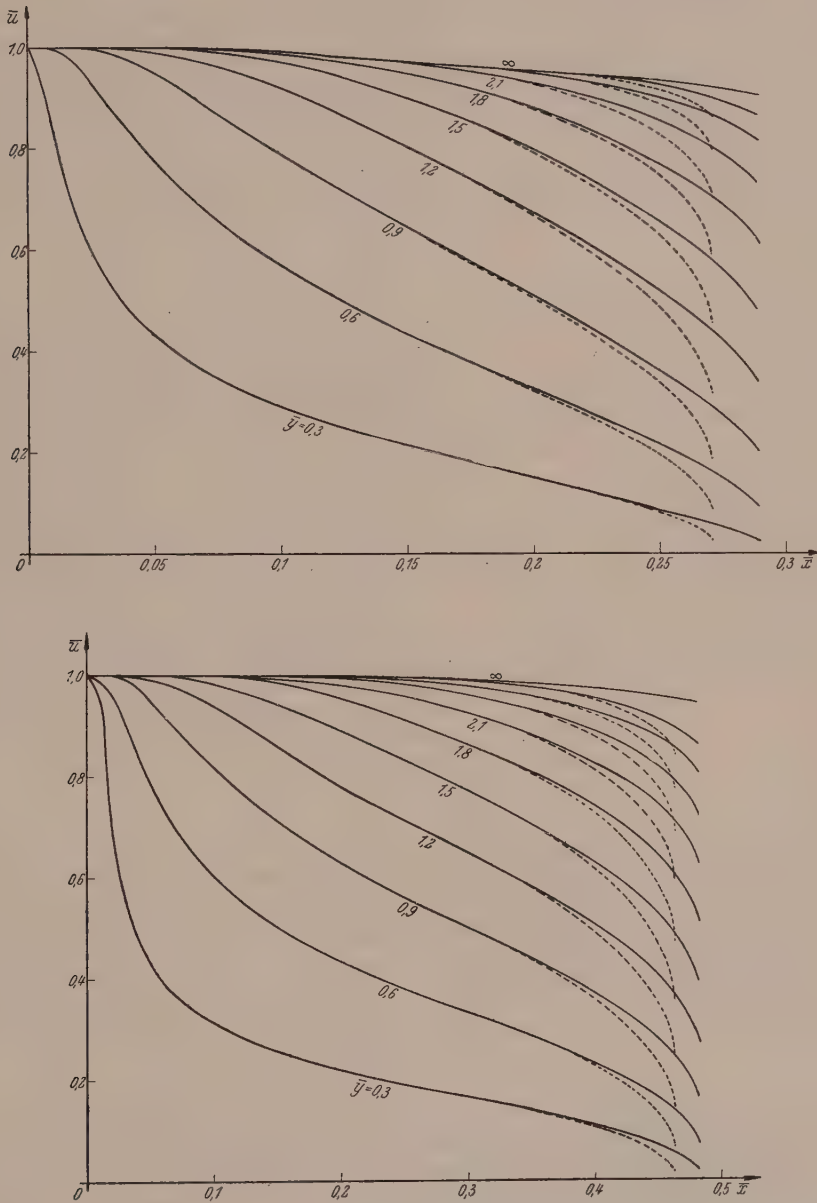


Abb. 7. Geschwindigkeitsverteilung in konstanten Wandabständen längs der Wand für die Fälle  $n = 2$  und 4. — Ergebnisse der neuen Reihe und der Fortsetzung mit der Differenzenmethode. - - - - Tanis Ergebnisse dort, wo sie von unseren abweichen

Grenzschichttheorie bedingten Fehler vermutlich im allgemeinen von der gleichen Größenordnung einiger Prozente. Selbst wenn eine genauere experimentelle Ermittlung der Ablösungsstelle vorläge, könnte sie daher keine Entscheidung für das eine oder das andere der oben genannten Zahlenergebnisse liefern.)

Abb. 2 zeigt die entsprechenden Ergebnisse für das zweite Tanische Beispiel,  $n = 4$ , somit  $\bar{U} = 1 - \bar{x}^4$ . Ganz entsprechend liefern die hier verfügbaren ersten 2 Glieder der neuen Reihe (Approximation 4. Ordnung in  $\xi$ , Kurve  $R_4$ ) Abweichungen von der Differenzenfortsetzung  $R_f$  von jener Stelle an stromabwärts, wo auch Tani mit seiner Fortsetzung  $T_f$  einsetzen muß, um das unbrauchbar werdende Ergebnis der ersten 6 Glieder seiner Reihe zu ersetzen. Gegenüber dem Wert  $\bar{x} = 0.462$  für die Ablösestelle nach Tani erhalten wir wieder eine etwas spätere Ablösung, bei  $\bar{x} = 0.485$  (prozentuale Abweichung zirka 4.7%).

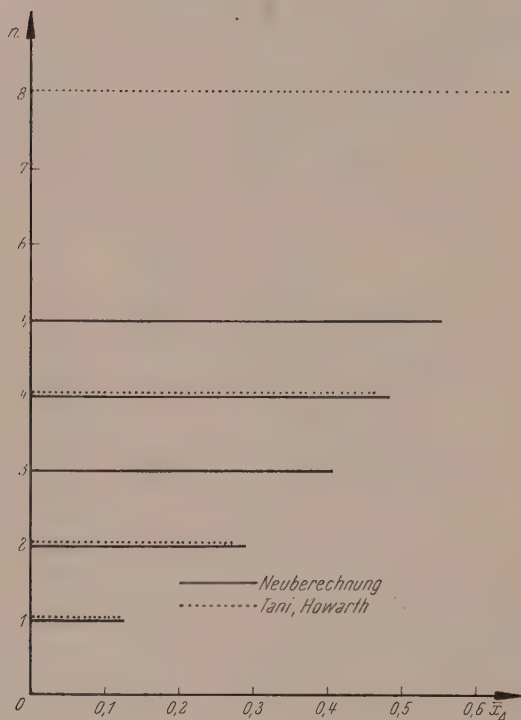


Abb. 8. Die von der Vorderkante bis zur Ablösungsstelle überströmte dimensionslose Wandbogenlänge  $\bar{x}_A$  in Abhängigkeit vom Exponenten  $n$ . Gestrichelt die praktisch nicht wesentlich abweichenden Ergebnisse von Howarth ( $n = 1$ ) und Tani ( $n = 2, 4$ ), ferner das Ergebnis von Tani für  $n = 8$ . Es ist (vgl.

$$(18)) \quad x_A = \bar{x}_A (u_0 / u_n)^{1/n}$$

Um noch einen ins einzelne gehenden und bekanntlich empfindlichen Vergleich der Tanischen Ergebnisse mit den unsrigen zu bieten, ist in Abb. 7 für  $n = 2$  und für  $n = 4$  die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht in konstanten Wandabständen entlang der Wand dargestellt. Dort, wo die Tanischen Ergebnisse von unseren abweichen, sind sie gestrichelt eingetragen.

Sowohl in Abb. 6 wie in Abb. 7 sind die Ergebnisse der Fortsetzungsrechnungen dort zugrunde gelegt, wo die Reihenergebnisse unbrauchbar werden.

Um schließlich die Abhängigkeit des dimensionslosen Wertes  $\bar{x}$  der Ablösestelle von dem Exponenten  $n$  zu demonstrieren, sind die von der Vorderkante an bis zur Ablösung überströmten Wandbogenlängen für  $n = 1, 2, 3, 4$  und  $5$  aufgetragen. Es ist (vgl. (18))  $\bar{x} = x (-u_n/u_0)^{1/n}$ .

In Abb. 3 haben wir den Verlauf der lokalen Wandschubspannung für alle von uns ausgewerteten Fälle ( $n = 1, 2, 3, 4$  und  $5$ ) zusammen aufgetragen. (Für die neue Reihe standen dabei 6, 3, 2, 2 und 2 Glieder zur Verfügung.) Dazu sind eingetragen unsere Fortsetzungsergebnisse  $R_f$  nach dem Differenzenverfahren und ferner für  $n = 1$  das Fortsetzungsergebnis nach Howarth, für  $n = 2$  und  $n = 4$  jene nach Tani. (Für  $n = 1$  standen Howarth 9 Glieder, für  $n = 2$  und  $4$  standen Tani 7 bzw. 6 Glieder der Reihe vom Blasius'schen Typus zur Verfügung.) Als Ablösungsstellen für die zusätzlich berechneten Fälle  $n = 1, 3$  und  $5$  finden wir: Für  $n = 1$  Ablösung bei  $\bar{x} = 0.125$  (gegenüber  $\bar{x} = 0.120$  bei Howarth, Abweichung 4.0%); für  $n = 3$  Ablösung bei  $\bar{x} = 0.409$ ; für  $n = 5$  Ablösung bei  $\bar{x} = 0.552$ .

Der Verlauf der Verdrängungsdicken für die behandelten Fälle ist in Abb. 4, der Verlauf der Impulsverlustdicken in Abb. 5 dargestellt.

Abb. 6 gibt eine Auswahl der berechneten Geschwindigkeitsprofile an verschiedenen Wandstellen  $\bar{x}$  wieder, und zwar für  $n = 2, 3, 4$  und  $5$  (für  $n = 1$  vgl. <sup>1</sup>).

(Eingegangen am 10. Januar 1957)



(Mitteilung aus dem Institut für Einführung in die Stark- und Schwachstromtechnik)

## Über den Kraftangriff des allgemeinen, nichtstationären elektromagnetischen Feldes an der Materie

Von H. Hofmann, Wien

**Zusammenfassung.** Die in früheren Arbeiten durchgeführten Untersuchungen über den Kraftangriff des stationären elektromagnetischen Feldes an der Materie werden auf das allgemeine, nichtstationäre Feld erweitert. Da die Maxwell'schen Gleichungen prinzipiell zwei Anschauungen über den Magnetismus der Materie, nämlich die Deutung durch Elementarströme oder durch magnetische Mengen, zulassen, werden beide Auffassungen behandelt und die diesbezüglichen Formeln angegeben. Es ergeben sich entsprechend dieser beiden Theorien auch verschiedene Ausdrücke für Energiestrom- und Impulsdichte des Feldes.

### I. Einleitung

Die Behandlung des Kraftangriffes im stationären elektromagnetischen Feld in <sup>1, 2, 3</sup> brachte zunächst folgende Resultate:

a) Es muß prinzipiell unterschieden werden zwischen der vom Feld auf einen Körper direkt ausgeübten Kraft — man spricht in diesem Fall auch von körperfestem Kraftangriff — und der wegen der Anwesenheit des betreffenden Feldes auf den Körper insgesamt einwirkenden bewegenden, ponderomotorischen Kraft. Die direkte, körperfeste Kraftdichte ist durch ein oder mehrere Produkte der Form „Mengendichte mal Feldstärke“ gegeben. Die ponderomotorische Kraft beinhaltet sowohl den direkten, körperfesten Kraftangriff als auch die von der umgebenden Materie wegen Anwesenheit des Feldes auf die Oberfläche des betreffenden Körpers ausgeübte Kraft und läßt sich aus diesen beiden Teilkräften entsprechend Gl. (2) oder auch zum Beispiel aus der bei einer virtuellen Verschiebung umgesetzten Energie, also unter Verwendung des Energieprinzips, berechnen.

Die körperfeste Kraft ist also allgemein

$$\mathfrak{F} = \int_V \mathfrak{f} dV, \quad (1)$$

( $\mathfrak{f}$  direkte, körperfeste Kraftdichte), während eben für die ponderomotorische Kraft

$$\mathfrak{F}_{\text{pond}} = \int_V \mathfrak{f} dV + \oint_A \mathfrak{p} dA = \mathfrak{F} + \oint_A \mathfrak{p} dA \quad (2)$$

angesetzt werden kann. Da sich die ponderomotorische Kraft im elektromagnetischen Feld unter Einhaltung gewisser Bedingungen (s. <sup>1</sup>, Abschnitte I, II und VIII, 1) in Integrale über das Volumen oder die Oberfläche des betreffenden Körpers allein umwandeln läßt, erhält man auch die anderen Formen

$$\mathfrak{F}_{\text{pond}} = \int_V \mathfrak{f}_{\text{pond}} dV = \oint_A \mathfrak{p}_{\text{pond}} dA. \quad (3)$$

Die in Gl. (3) auftretenden ponderomotorischen Volumskräfte  $\mathfrak{f}_{\text{pond}}$  bzw. ponderomotorischen Oberflächenkräfte (Spannungen)  $\mathfrak{p}_{\text{pond}}$  sind jedoch rein formaler Natur, da sie, wie der Vergleich der Gln. (2) und (3) zeigt, physikalisch deutbare Volums- und Oberflächenkräfte in sich vereinen. Sie haben vom Standpunkt einer molekularen Theorie der Materie aus gesehen nur Bedeutung als Rechengrößen, die bei Integration — in dem einen Fall über das Volumen, im anderen über die Oberfläche des betrachteten

<sup>1</sup> H. Hofmann: Über den Kraftangriff des stationären elektromagnetischen Feldes an der Materie. Österr. Ing.-Arch. 10, H. 4 (1956).

<sup>2</sup> H. Hofmann: Über den Kraftangriff des Magnetfeldes an Elementarströmen. Österr. Ing.-Arch. 11, H. 1 (1957).

<sup>3</sup> H. Hofmann: Die Behandlung von Sprungflächen beim Kraftangriff des stationären elektromagnetischen Feldes an der Materie. Österr. Ing.-Arch. 11, H. 1 (1957).

Körpers — allein bereits die bewegende Gesamtkraft liefern. Demgemäß ist zum Beispiel im elektromagnetischen Feld streng zwischen den aus dem Lorentz-Ansatz für das Makrofeld abgeleiteten direkten, körperfesten und den Maxwell'schen ponderomotorischen Kräften zu unterscheiden (s. <sup>1</sup>, Abschn. II).

b) Setzt man als direkte, körperfeste Kraftdichte unmittelbar nur das Produkt aus der makroskopisch resultierend in Erscheinung tretenden Mengendichte und der in Frage kommenden Feldstärke an (im statischen elektrischen Feld also „freie“ Ladungsdichte mal elektrische Feldstärke), so gelangt man bei Körpern, die sich nicht im Vakuum befinden sondern von anderer Materie umgeben sind, durch Integration einer solchen Kraftdichte allein noch nicht auf die direkte, körperfeste Kraft auf einen abgeschlossenen Körper. Man wendet in diesem Fall „mathematische“ Bereichsabgrenzung an, die bei polarisierter Materie prinzipiell nicht ausschließlich ganze Materieteilchen erfaßt (s. <sup>4</sup> und <sup>1</sup>, Abschn. III). An der Bereichsgrenze decken sich nämlich die (makroskopisch flächenhaften) Polarisationsladungen oder Elementarströme benachbarter Materiebereiche und treten nicht in Erscheinung (ausgenommen bei Sprungflächen, von denen hier zunächst abgesehen wird). Die beiden gleichgroßen, sich deckenden Schichten verschiedenen Vorzeichens zählen jedoch physikalisch gesehen zu verschiedenen Materiebereichen; die eine der beiden Schichten muß somit bei dem ins Auge gefaßten Körper zusätzlich zu der makroskopisch feststellbaren Mengendichte mitberücksichtigt werden. Die Beziehungen, die diese andere „physikalische“ Art der Bereichsabgrenzung zur Voraussetzung haben — sie erfaßt also prinzipiell nur ganze Materieteilchen (Dipole, Elementarströme; s. wieder <sup>4</sup> und <sup>1</sup>, Abschn. III) — führen unmittelbar auf die direkte, körperfeste Kraft auf den betreffenden Materiebereich.

Aus dem Lorentz-Ansatz für die Kraftdichte oder aus dem entsprechenden Ansatz im Bereich der „Theorie der magnetischen Mengen“ gewinnt man nun durch direkten Übergang auf die Größen des Makrofeldes, also auf die gemittelten Mikrogrößen, die Ausdrücke für „mathematische“ Bereichsabgrenzung, da die Mittelwertbildung der Mikrogrößen stets „mathematische“ Abgrenzung zur Voraussetzung hat. Wenn in dieser Arbeit wieder die Kraftansätze für beide Arten der Begrenzung angegeben werden, so wird damit folgende Absicht verfolgt: Der direkte Anschluß einerseits an die Gleichungen des Mikrobereiches und andererseits an Literaturstellen, die sich zum Beispiel mit dem Impulssatz der Elektrodynamik unter Verwendung der Größen des Makrofeldes befassen (s. etwa <sup>5</sup>, Abschn. 6), wird durch die mehr formalen Ansätze der „mathematischen“ Abgrenzung gewonnen. Für die praktische Anwendung der direkten Kraftdichten hingegen kommen im Grunde genommen wieder nur die Ausdrücke für die „physikalische“ Bereichsbegrenzung in Frage. Lediglich bei der Berechnung der Kraft auf Körper, die sich völlig im Vakuum befinden, spielt begreiflicherweise mangels angrenzender Materie der Unterschied der beiden Abgrenzungsarten beim Integrationsergebnis keine Rolle, so daß auch die Ausdrücke für „mathematische“ Begrenzung unmittelbar angewendet werden dürften. In diesem Falle müssen übrigens auch die direkte und die ponderomotorische Kraft gleich sein (vgl. <sup>1</sup>, Abschn. VIII).

## II. Direkte, körperfeste Volumskräfte im nichtstationären elektromagnetischen Feld der „Theorie der Elementarströme“.

Im nichtstationären Fall ist eine getrennte Betrachtung des elektrischen und des magnetischen Feldes nicht mehr zweckmäßig, da die Bedeutung der jetzt auf-

<sup>4</sup> H. Hofmann: Zur Frage der Bereichsabgrenzung elektrisch und magnetisch polarisierter Materie. Elektrotechn. u. Maschinenbau **73**, H. 10 (1956).

<sup>5</sup> F. Hund: Materie als Feld. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1954.



tretenden zeitabhängigen Glieder der beiden Felder zum Teil nur gemeinsam erfaßt werden kann. Legt man den Untersuchungen die „Theorie der Elementarströme“, also die Prinzipien der Elektronentheorie, zugrunde, so muß man vom Lorentz-Ansatz für die Kraftdichte im Mikrobereich ausgehen

$$\mathbf{f}_{\text{mi}}^{(\text{E})} = \varrho_{\text{mi}}^{(\text{el})} \cdot \mathbf{e}^{(\text{E})} + \frac{1}{c_0} [\varrho_{\text{mi}}^{(\text{el})} \mathbf{v}, \mathbf{h}^{(\text{E})}]. \quad (4)$$

[Index (E) Elektronentheorie bzw. „Theorie der Elementarströme“,  $\varrho_{\text{mi}}^{(\text{el})}$  el. Ladungsdichte im Mikrobereich,  $\mathbf{e}^{(\text{E})}$ ,  $\mathbf{h}^{(\text{E})}$  elektrische und magnetische Feldstärke im Mikrobereich nach der Elektronentheorie.] Ferner muß man beachten, daß man von den Grundgleichungen des Mikrobereiches auf umgeformte Maxwellsche Gleichungen für das elektromagnetische Makrofeld gelangt (s.<sup>6</sup>, Gl. I A bis I D, bzw. <sup>5</sup>, Abschn. 4, Gl. 5, oder <sup>7</sup>, Gl. I b bis IV b), wobei die Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{B}$  die Bedeutung der beiden Feldstärken des elektrischen und des magnetischen Teilfeldes erhalten. Sieht man die Materie als ideales Kontinuum an (kontinuierliche Verteilung wahrer Ladungen und von Dipolen bis zum (makroskopisch) unendlich kleinen Volumselement), so kann man auch bei der Kraftdichte Gl. (4) auf die Größen des Makrofeldes übergehen. Wegen der beiden Möglichkeiten der Bereichsabgrenzung werden wieder zwei verschiedene Ausdrücke für die Kraftdichte erhalten.

### 1. „Mathematische“ Bereichsabgrenzung

Bei „mathematischer“ Bereichsabgrenzung kann man die für den Mikrobereich gültige Form der Gleichungen unmittelbar verwenden, das heißt die entsprechenden Größen des Makrobereiches direkt einführen: Gl. (4) führt dann wegen

$$\overline{\varrho_{\text{mi}}^{(\text{el})}} = \varrho'^{(\text{el})} = \varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} + \varrho_{\text{P}}^{(\text{el})} = \text{div } \mathfrak{D} - \text{div } \mathfrak{P} = \text{div } \mathfrak{E}, \quad (5)$$

$$\overline{\varrho_{\text{mi}}^{(\text{el})} \mathbf{v}} = \mathbf{g} + c_0 \text{rot } \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\overline{\mathbf{e}^{(\text{E})}} = \mathfrak{E} \quad (7)$$

und

$$\overline{\mathbf{h}^{(\text{E})}} = \mathfrak{B} \quad (8)$$

(s. <sup>7</sup>, Gl. 1, 7, 11 und 12) auf

$$\mathbf{f}_{(\text{m})}^{(\text{E})} = \varrho'^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E} + \frac{1}{c_0} \left[ \mathbf{g} + c_0 \text{rot } \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right]. \quad (9)$$

[Index (m) „mathematische“ Abgrenzung.] Dabei ist  $\mathbf{g}$  die Leitungsstromdichte, der Ausdruck

$$c_0 \text{rot } \mathfrak{M} = \mathbf{g}^{(\text{E})} \quad (10)$$

bedeutet die Dichte der Elementarströme (Magnetisierungsströme) und  $\partial \mathfrak{P} / \partial t$  die Dichte der (elektrischen) Polarisationsströme. Diese letzte Größe tritt zusätzlich zu den beiden ersteren, auch im stationären Feld [s.<sup>1</sup>, Gl. (75)] wirksamen Stromdichten auf, da sich bei zeitlicher Änderung des Polarisationszustandes Elektrizitätsmengen, nämlich Polarisationsladungen, bewegen. Mit Hilfe der ursprünglichen, besser aber noch der umgeformten Maxwellschen Gleichungen (s. <sup>7</sup>, Gl. I b bis IV b) erhält man dann aus Gl. (9)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{(\text{m})}^{(\text{E})} &= \mathfrak{E} \text{div } \mathfrak{E} + \left[ \text{rot } \mathfrak{B} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right] = \mathfrak{E} (\nabla \mathfrak{E}) + \left[ [\nabla \mathfrak{B}] - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right] = \\ &= (\nabla, \mathfrak{E} \mathfrak{E}) - (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E} + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{B} - \nabla (\mathfrak{B} \mathfrak{B}_c) - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

<sup>6</sup> L. Kneissler: Die Maxwellsche Theorie in veränderter Formulierung. Wien: Springer-Verlag. 1949.

<sup>7</sup> H. Hofmann: Über die Deutung der Maxwellschen Gleichungen mit Hilfe elektrischer und magnetischer Mengen. Acta Physica Austriaca, 11, H. 2 (1957).

(Der Index  $c$  bedeutet, daß die Größe bezüglich des vorherstehenden Differentiationsoperators konstant zu halten ist.) Wegen der IV. Maxwell'schen Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = (\nabla \mathfrak{B}) = 0 \quad (12)$$

und der Umformungen

$$\nabla (\mathfrak{B})^2 = 2 \nabla (\mathfrak{B} \mathfrak{B}_c), \quad (13)$$

$$(\nabla \mathbf{I}) = \nabla \quad (14)$$

( $\mathbf{I}$  Einheitstensor) und

$$[\mathfrak{E} [\nabla \mathfrak{E}]] = \nabla (\mathfrak{E} \mathfrak{E}_c) - (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E} = \frac{1}{2} \nabla (\mathfrak{E})^2 - (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E}, \quad (15)$$

ergibt sich aus Gl. (11)

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_{(m)}^{(E)} &= \left( \nabla, \mathfrak{E} \mathfrak{E} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} \right) + [\mathfrak{E} [\nabla \mathfrak{E}]] + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{B} + \mathfrak{B} (\nabla \mathfrak{B}) - \frac{1}{2} \nabla (\mathfrak{B})^2 \mathbf{I} - \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \mathfrak{B} \right] = \\ &= \left( \nabla, \mathfrak{E} \mathfrak{E} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} \right) + \left( \nabla, \mathfrak{B} \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B})^2 \mathbf{I} \right) + [\mathfrak{E} [\nabla \mathfrak{E}]] - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \mathfrak{B} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

was unter Berücksichtigung der II. Maxwell'schen Gleichung schließlich auf

$$\mathfrak{f}_{(m)}^{(E)} = \left( \nabla, \mathfrak{E} \mathfrak{E} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} \right) + \left( \nabla, \mathfrak{B} \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B})^2 \mathbf{I} \right) - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] \quad (17)$$

führt. Führt man die in<sup>1</sup> definierten Tensoren des elektrischen Feldes und des magnetischen Feldes der „Theorie der Elementarströme“ für den Fall „mathematischer“ Bereichsabgrenzung ein [1, Gl. (24) und (79)]

$$\mathbf{T}_{(m)}^{(el)} = \mathfrak{E} \mathfrak{E} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}^{(el)}, \quad (18)$$

$$\mathbf{T}_{(m)}^{(E)} = \mathfrak{B} \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B})^2 \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}^{(E)}, \quad (19)$$

so ergibt sich weiterhin unter Benützung von

$$\mathbf{T}_{(m)}^{(el, E)} = \mathbf{T}_{(m)}^{(el)} + \mathbf{T}_{(m)}^{(E)} = \mathfrak{E} \mathfrak{E} + \mathfrak{B} \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \{ (\mathfrak{E})^2 + (\mathfrak{B})^2 \} \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}^{(el, E)} \quad (20)$$

die Beziehung

$$\mathfrak{f}_{(m)}^{(E)} = \operatorname{div} \mathbf{T}_{(m)}^{(el, E)} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] = \operatorname{div} \mathbf{T}_{(m)}^{(el, E)} - \frac{\partial \mathfrak{G}^{(E)}}{\partial t} \quad (21)$$

(vgl. <sup>6</sup>, Kap. IV), oder

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_{(m)}^{(el, E)} = \mathfrak{f}_{(m)}^{(E)} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] = \mathfrak{f}_{(m)}^{(E)} + \frac{\partial \mathfrak{G}^{(E)}}{\partial t}. \quad (22)$$

Die Divergenz des Tensors  $\mathbf{T}_{(m)}^{(el, E)}$  liefert also die Summe aus der an den Ladungen des „mathematisch“ begrenzten Bereiches angreifenden direkten Kraft des elektromagnetischen Feldes und der zeitlichen Ableitung einer Größe, die als Impulsdichte  $\mathfrak{G}^{(E)}$  des elektromagnetischen Makrofeldes im Sinne der Elektronentheorie gedeutet werden muß:

$$\mathfrak{G}^{(E)} = \frac{1}{c_0} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}]. \quad (23)$$

Die Impulsdichte  $\mathfrak{G}^{(E)}$  und die mit ihr in Zusammenhang stehende Energiestromdichte

$$\mathfrak{S}^{(E)} = c_0^2 \mathfrak{G}^{(E)} = c_0 [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] \quad (24)$$

sind dem Vektorprodukt der beiden Feldstärken des elektromagnetischen Feldes proportional, wobei im Rahmen dieser Theorie sinngemäß das Vektorprodukt der Größen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{B}$  erhalten wurde.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß die Anwendung des Impulssatzes der Elektrodynamik, der direkt aus den Feldgleichungen abgeleitet wird, unmittelbar auf dasselbe Resultat für „mathematische“ Abgrenzung führt, was zu erwarten ist, da ja die



Feldgleichungen des Makrobereiches nur die makroskopisch in Erscheinung tretenden Mittelwerte der Ladungs- und Stromdichten enthalten und somit „mathematische“ Begrenzung der Volumselemente bei der Mittelwertsbildung der Größen des Mikrobereiches zur Voraussetzung haben. Man geht am besten gleich von den im Sinne der Elektronentheorie umgeformten Maxwell'schen Gleichungen (<sup>7</sup>, Gl. I b bis IV b) aus und folgert aus ihnen (s. auch <sup>5</sup>, Abschn. 6):

$$[\text{rot } \mathfrak{B}, \mathfrak{B}] + [\text{rot } \mathfrak{E}, \mathfrak{E}] = [[\nabla \mathfrak{B}] \mathfrak{B}] + [[\nabla \mathfrak{E}] \mathfrak{E}] =$$

$$= (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{B} - \nabla (\mathfrak{B} \mathfrak{B}_c) + (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E} - \nabla (\mathfrak{E} \mathfrak{E}_c) = \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] + \frac{1}{c_0} \left[ \mathfrak{g} + c_0 \text{rot } \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right].$$

Summiert man hiezu

$$\mathfrak{E} (\nabla \mathfrak{E}) = \varrho'^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E}, \quad (25)$$

so erhält man mit den Umformungen Gl. (13) und (14), den Definitionen (18), (19) und (20) und der IV. Maxwell'schen Gleichung (12) wieder

$$\begin{aligned} \left( \nabla, \mathfrak{B} \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B})^2 \mathbf{I} \right) + \left( \nabla, \mathfrak{E} \mathfrak{E} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} \right) &= (\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{el}, \text{E})}) = \text{div } \mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el}, \text{E})} = \\ &= \varrho'^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E} + \frac{1}{c_0} \left[ \mathfrak{g} + c_0 \text{rot } \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right] + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] = \mathfrak{f}_{(\text{m})}^{(\text{E})} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] \end{aligned} \quad (27)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (22). Für theoretische Betrachtungen also, die die Klärung allgemeiner Prinzipien aber keine weiteren praktischen Auswertungen zum Ziele haben, wird man somit mit Vorteil die Ausdrücke für „mathematische“ Bereichsabgrenzung heranziehen können.

## 2. „Physikalische“ Bereichsabgrenzung

Bei der Ableitung der Kraft auf einen „physikalisch“ begrenzten Bereich gibt es wieder die beiden Wege: Entweder es werden zur Ergänzung auf ganze Dipole zu der Kraft auf den „mathematisch“ begrenzten Bereich, die z. B. mit Hilfe der Kraftdichte Gl. (9) oder Gl. (21) angeschrieben werden kann, die Kräfte auf die in der Bereichsgrenze latent vorhandenen flächenhaften Dichten der elektrischen Polarisationsladungen und der Elementarströme hinzugezählt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} &= \int_V \left\{ \varrho'^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E} + \frac{1}{c_0} \left[ \mathfrak{g} + c_0 \text{rot } \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right] \right\} dV + \oint_A \left\{ \sigma_{\text{P}}^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E} + \frac{1}{c_0} [j^{(\text{E})} \mathfrak{B}] \right\} dA = \\ &= \int_V \left\{ \text{div } \mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el}, \text{E})} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] \right\} dV + \oint_A \{ (\mathfrak{P} \mathbf{n}) \mathfrak{E} + [[\mathfrak{M} \mathbf{n}] \mathfrak{B}] \} dA. \end{aligned} \quad (28)$$

(Index (ph) „physikalische“ Abgrenzung.) In Gl. (28) fanden dabei die Beziehungen für die Flächendichte der elektrischen Polarisationsladungen [<sup>1</sup>, Gl. (16)]

$$\sigma_{\text{P}}^{(\text{el})} = (\mathfrak{P} \mathbf{n}) \quad (29)$$

und die Flächendichte der Magnetisierungs- (Elementar-) Ströme [<sup>1</sup>, Gl. (17)]

$$j^{(\text{E})} = c_0 [[\mathfrak{M} \mathbf{n}]] \quad (30)$$

Anwendung. Oder aber man geht direkt von der Kraftdichte für „physikalisch“ begrenzte Materie aus, wobei zu den Ausdrücken des stationären, von elektrischen Ladungen und Elementarströmen erzeugten elektromagnetischen Feldes [<sup>1</sup>, Gl. (29), und <sup>2</sup>, Gl. (11)] im allgemeinen, nichtstationären Feld die ausschließlich räumlich verteilte Stromdichte des Polarisationsstromes  $\partial \mathfrak{P} / \partial t$  hinzutritt:

$$\mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E} + (\mathfrak{P} \text{grad}) \mathfrak{E} + \frac{1}{c_0} [\mathfrak{g} \mathfrak{B}] + \text{grad } (\mathfrak{M}_c \mathfrak{B}) + \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right]. \quad (31)$$

Beide Wege führen natürlich auf dieselbe Kraftdichte, die jetzt aus der ursprünglichen Gl. (31) entwickelt werden soll: Mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen folgt aus ihr

$$\mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \mathfrak{E}(\nabla \mathfrak{D}) + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{E} + \left[ \text{rot } \mathfrak{H} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right] + \nabla(\mathfrak{M}_e \mathfrak{B}) + \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right] + \mathfrak{H}(\nabla \mathfrak{B}). \quad (32)$$

Diese Beziehung wird weiter umgeformt, wobei die aus der II. Maxwellschen Gleichung gewonnene Umrechnung

$$- \left[ \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right] = [\mathfrak{E} \text{rot } \mathfrak{E}] = [\mathfrak{E}(\nabla \mathfrak{E})] = \nabla(\mathfrak{E} \mathfrak{E}_e) - (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E} = \frac{1}{2} \nabla(\mathfrak{E})^2 - (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E} \quad (33)$$

und die Definitionsgleichungen

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{B} + \mathfrak{E} \quad (34)$$

und

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{M} + \mathfrak{H} \quad (35)$$

Verwendung finden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(\nabla \mathfrak{D}) + (\mathfrak{D} - \mathfrak{E}, \nabla) \mathfrak{E} + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{H} - \nabla(\mathfrak{H} \mathfrak{B}_e) + \nabla(\mathfrak{M}_e \mathfrak{B}) - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right] + \mathfrak{H}(\nabla \mathfrak{B}) &= \\ &= (\nabla, \mathfrak{D} \mathfrak{E}) - (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E} + (\nabla, \mathfrak{B} \mathfrak{H}) - \nabla(\mathfrak{B} \mathfrak{B}_e) + \nabla(\mathfrak{M} \mathfrak{B}_e) + \nabla(\mathfrak{M}_e \mathfrak{B}) - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right] = \\ &= (\nabla, \mathfrak{D} \mathfrak{E}) - \frac{1}{2} \nabla(\mathfrak{E})^2 - \frac{1}{c_0} \left[ \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right] + (\nabla, \mathfrak{B} \mathfrak{H}) - \frac{1}{2} \nabla(\mathfrak{B})^2 + \nabla(\mathfrak{M} \mathfrak{B}) - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{B} \right] = \\ &= (\nabla, \mathfrak{D} \mathfrak{E}) - \frac{1}{2} \nabla(\mathfrak{E})^2 + (\nabla, \mathfrak{B} \mathfrak{H}) - \frac{1}{2} \nabla(\mathfrak{B} \mathfrak{H}) + \frac{1}{2} \nabla(\mathfrak{M} \mathfrak{B}) - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}]. \end{aligned} \quad (36)$$

Mit Hilfe der Beziehung (14) und der in <sup>1</sup> [Gl. (32) und (86)] definierten Tensoren für „physikalische“ Abgrenzung,

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} = \mathfrak{E} \mathfrak{D} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} = \mathfrak{E} \mathfrak{D} - \frac{1}{2} (\mathfrak{D} \mathfrak{E}) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{E}) \mathbf{I}, \quad (37)$$

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \dots\dots\dots = \mathfrak{H} \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{H}) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{M} \mathfrak{B}) \mathbf{I}, \quad (38)$$

die für das elektromagnetische Gesamtfeld der elektrischen Ladungen und Elementarströme zu dem Tensor

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} = \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \{ (\mathfrak{D} \mathfrak{E}) - (\mathfrak{B} \mathfrak{E}) + (\mathfrak{B} \mathfrak{H}) - (\mathfrak{M} \mathfrak{B}) \} \mathbf{I} \quad (39)$$

zusammengefaßt werden können, folgen wieder die den Gl. (21) und (22) für „mathematische“ Abgrenzung analogen Beziehungen

$$\mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \text{div } \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] = \text{div } \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} - \frac{\partial \mathfrak{G}^{(\text{E})}}{\partial t} \quad (40)$$

und

$$\text{div } \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} = \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] = \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} + \frac{\partial \mathfrak{G}^{(\text{E})}}{\partial t}. \quad (41)$$

### III. Direkte, körperfeste Volumskräfte im nichtstationären elektromagnetischen Feld der „Theorie magnetischer Mengen“

Die Maxwellschen Gleichungen lassen sich nicht nur im Sinne der Elektronentheorie deuten, sondern können auch durch Mittelwertbildung aus den für den Mikrobereich gültigen Grundgleichungen einer „Theorie (elektrischer und) magnetischer Mengen“ gefolgert werden (s. <sup>7</sup>, auch <sup>1</sup>, Abschn. V). Während nach der Elektronentheorie neben der Leitungsstromdichte  $\mathfrak{g}$  die Dichte der Elementarströme  $\mathfrak{g}^{(\text{E})}$  die Bedeutung der im Magnetfeld in Frage kommenden Mengendichte besitzt und als Feldstärke des magnetischen Makrofeldes der Vektor  $\mathfrak{B}$  anzusehen ist, tritt im Bereiche



der „Theorie magnetischer Mengen“ neben der Leitungsstromdichte  $g$  die Dichte der „freien“ magnetischen Mengen

$$\varrho^{(\text{mgn})} = \text{div } \mathfrak{S} = -\text{div } \mathfrak{M} = \varrho_p^{(\text{mgn})} \quad (42)$$

als Mengendichte auf, als magnetische Feldstärke ist hier der Vektor  $\mathfrak{S}$  anzusprechen. Die sinnwidrige Verknüpfung von Größen der beiden Theorien kann natürlich keinesfalls auf physikalisch richtige Begriffe führen, so muß z. B. eine von Sommerfeld und Bopp in <sup>8</sup> vorgeschlagene „Kraftdichte“ des Magnetfeldes, die durch Produktbildung der Dichte der freien Magnetmengen  $\varrho^{(\text{mgn})}$  und der Feldstärke der „Theorie der Elementarströme“  $\mathfrak{B}$  entsteht, abgelehnt werden. Die Größe  $\mathfrak{B}$  oder, wie an anderer Stelle<sup>9</sup> (§ 28, B) behauptet wird, im Falle einer mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten magnetischen Ladung der Ausdruck  $\mathfrak{B} - \frac{1}{c_0} [v \mathfrak{E}]$ , kann nicht zur Berechnung einer Kraft auf einen magnetischen Einheitspol herangezogen werden, da  $\mathfrak{B}$  ja nur dann die Bedeutung der Feldstärke des Magnetfeldes erhält, wenn die Maxwellschen Gleichungen im Sinne der Elektronentheorie ausgelegt werden, in deren Rahmen es prinzipiell keine Magnetmengen gibt. Setzt man jedoch die Existenz von magnetischen Mengen voraus, die, solange die IV. Maxwellsche Gleichung Gültigkeit besitzt, entsprechend Gl. (42) nur in Form von Polarisationsmengen auftreten, so ist, wie in <sup>7</sup> und auch schon in <sup>1</sup> (Abschn. V) gezeigt wurde, als magnetische Feldstärke der Vektor  $\mathfrak{S}$  zu verwenden [s. die folgende Gl. (50)]. Die physikalisch sinngemäße Anwendung der Vektoren  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{B}$  stellt auch die Voraussetzung dafür dar, daß man die direkten körperfesten Kraftdichten im stationären elektromagnetischen Feld als Divergenzen einander analoger Tensoren darzustellen vermag. Ebenso nur unter dieser Voraussetzung kann man die Übereinstimmung der aus dem Energieprinzip gewonnenen Maxwellschen bewegenden, ponderomotorischen Kräfte mit den bewegenden Kräften nachweisen, die man mit Hilfe der aus der Elektronentheorie (Lorentz-Ansatz) oder der „Theorie der magnetischen Mengen“ abgeleiteten direkten Feldkräfte erhält (s. <sup>1</sup>, Abschn. VIII).

Zu den Grundgleichungen der „Theorie der elektrischen und magnetischen Mengen“ (7, Abschn. 2) tritt also noch der Ansatz für die Kraftdichte im Mikrobereich

$$\mathfrak{f}_{\text{mi}}^{(\text{M})} = \varrho_{\text{mi}}^{(\text{el})} e^{(\text{M})} + \frac{1}{c_0} [\varrho_{\text{mi}}^{(\text{el})} v, \mathfrak{h}^{(\text{M})}] + \varrho_{\text{mi}}^{(\text{mgn})} \mathfrak{h}^{(\text{M})} - \frac{1}{c_0} [\varrho_{\text{mi}}^{(\text{mgn})} v, e^{(\text{M})}] \quad (43)$$

[Index (M) „Theorie der elektrischen und magnetischen Mengen“,  $\varrho_{\text{mi}}^{(\text{el})}$ ,  $\varrho_{\text{mi}}^{(\text{mgn})}$  el. bzw. magn. Ladungsdichte im Mikrobereich,  $e^{(\text{M})}$ ,  $\mathfrak{h}^{(\text{M})}$  el. bzw. magn. Feldstärke im Mikrobereich nach der „Theorie elektrischer und magnetischer Mengen“]. Die beiden letzten Summanden in Gl. (43) stellen das magnetische Analogon zum Kraftansatz auf elektrische Ladungen dar, dabei wird das negative Vorzeichen im letzten Summanden (der „magnetischen Lorentz-Kraft“) von grundlegenden Prinzipien, wie etwa dem Relativitätsprinzip, gefordert; es hängt letzten Endes mit dem negativen Vorzeichen in der II. Maxwellschen Gleichung zusammen. (Über die Invarianz der Grundgleichungen der „Theorie der elektrischen und magnetischen Mengen“ gegenüber einer Lorentz-Transformation wird noch an anderer Stelle berichtet werden.)

<sup>8</sup> Sommerfeld und Bopp: Zum Problem der Maxwellschen Spannungen. Ann. Physik 8, H. 1/2 (1950).

<sup>9</sup> Sommerfeld: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. III, Elektrodynamik. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft Geest und Portig. 1949. Die Beziehung wird von Sommerfeld wegen der Verwendung anderer Größendefinitionen in der Form  $\mathfrak{B} - \frac{1}{c_0^2} [v \mathfrak{E}]$  angegeben.

## 1. „Mathematische“ Bereichsabgrenzung

Wie schon mehrfach erwähnt, gestattet die „mathematische“ Bereichsabgrenzung einen direkten Übergang von den Gleichungen des Mikrobereiches zu denen des Makrobereiches, wenn man die Materie als ideales Kontinuum auffaßt. Es können in diesem Fall auch beim Ansatz für die Kraftdichte die Makrogrößen, also die gemittelten Größen des Mikrobereiches, eingeführt werden, wobei im Bereich der „Theorie der elektrischen und magnetischen Mengen“ die folgenden Beziehungen zu gelten haben:

$$\overline{\varrho_{\text{mi}}^{(\text{el})}} = \varrho'^{(\text{el})} = \varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} + \varrho_{\text{p}}^{(\text{el})} = \text{div } \mathfrak{D} - \text{div } \mathfrak{P} = \text{div } \mathfrak{E}, \quad (44)$$

$$\overline{\varrho_{\text{mi}}^{(\text{mgn})}} = \varrho'^{(\text{mgn})} = \varrho_{\text{p}}^{(\text{mgn})} = -\text{div } \mathfrak{M} = \text{div } \mathfrak{H}, \quad (45)$$

$$\overline{\varrho_{\text{mi}}^{(\text{el})} \mathfrak{v}} = \mathfrak{g} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \quad (46)$$

$$\overline{\varrho_{\text{mi}}^{(\text{mgn})} \mathfrak{v}} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \quad (47)$$

$$\overline{\mathfrak{e}^{(\text{M})}} = \mathfrak{E}, \quad (48)$$

$$\overline{\mathfrak{h}^{(\text{M})}} = \mathfrak{H}, \quad (49)$$

(s. 7, Gl. 16, 20, 22, 25, 27 und 28). Man erhält dann aus Gl. (43)

$$\mathfrak{f}_{(\text{m})}^{(\text{M})} = \varrho'^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E} + \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \cdot \mathfrak{H} \right] + \varrho'^{(\text{mgn})} \mathfrak{H} + \frac{1}{c_0} [\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{H}] - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \cdot \mathfrak{E} \right]. \quad (50)$$

Zu den im stationären Feld gültigen Ausdrücken [1, Gl. (18) und (61)] kommt also jetzt im allgemeinen Fall noch der Kraftangriff auf die Dichten des elektrischen und des magnetischen Polarisationsstromes  $\partial \mathfrak{P} / \partial t$  und  $\partial \mathfrak{M} / \partial t$ . Unter Verwendung der Maxwellschen Gleichungen und der Beziehungen (34), (35), (14), (15), (44) und (45) folgt weiter aus Gl. (50)

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_{(\text{m})}^{(\text{M})} &= \mathfrak{E} (\nabla \cdot \mathfrak{E}) + \mathfrak{H} (\nabla \cdot \mathfrak{H}) + \left[ [\nabla \cdot \mathfrak{H}] - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \cdot \mathfrak{H} \right] + \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \cdot \mathfrak{H} \right] - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \cdot \mathfrak{E} \right] = \\ &= (\nabla \cdot \mathfrak{E} \mathfrak{E}) - (\mathfrak{E} \nabla) \cdot \mathfrak{E} + (\nabla \cdot \mathfrak{H} \mathfrak{H}) - (\mathfrak{H} \nabla) \cdot \mathfrak{H} + (\mathfrak{H} \nabla) \cdot \mathfrak{H} - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathfrak{H})^2 - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \cdot \mathfrak{H} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \cdot \mathfrak{E} \right] = \left( \nabla \cdot \mathfrak{E} \mathfrak{E} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} \right) + [\mathfrak{E} (\nabla \cdot \mathfrak{E})] + \left( \nabla \cdot \mathfrak{H} \mathfrak{H} - \frac{1}{2} (\mathfrak{H})^2 \mathbf{I} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \cdot \mathfrak{H} \right] + \frac{1}{c_0} \left[ \mathfrak{E} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \right] = \left( \nabla \cdot \mathfrak{E} \mathfrak{E} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} \right) + \left( \nabla \cdot \mathfrak{H} \mathfrak{H} - \frac{1}{2} (\mathfrak{H})^2 \mathbf{I} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}]. \end{aligned} \quad (51)$$

Benützt man wieder die in 1 [Gl. (24) und (66)] definierten Tensoren für „mathematische“ Bereichsabgrenzung

$$\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})} = \mathfrak{E} \mathfrak{E} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{el})}, \quad (52)$$

$$\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{M})} = \mathfrak{H} \mathfrak{H} - \frac{1}{2} (\mathfrak{H})^2 \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{M})}, \quad (53)$$

bzw. deren Summe

$$\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el}, \text{M})} = \mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})} + \mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{M})} = \mathfrak{E} \mathfrak{E} + \mathfrak{H} \mathfrak{H} - \frac{1}{2} \{ (\mathfrak{E})^2 + (\mathfrak{H})^2 \} \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{el}, \text{M})}, \quad (54)$$

so folgt aus Gl. (51)

$$\mathfrak{f}_{(\text{m})}^{(\text{M})} = \text{div } \mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el}, \text{M})} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}] = \text{div } \mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el}, \text{M})} - \frac{\partial \mathfrak{G}^{(\text{M})}}{\partial t}, \quad (55)$$

oder

$$\text{div } \mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el}, \text{M})} = \mathfrak{f}_{(\text{m})}^{(\text{M})} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}] = \mathfrak{f}_{(\text{m})}^{(\text{M})} + \frac{\partial \mathfrak{G}^{(\text{M})}}{\partial t}. \quad (56)$$



Für Impuls- und Energiestromdichte erhält man also sinngemäß im Rahmen der „Theorie elektrischer und magnetischer Mengen“ die aus den beiden Feldstärken  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  dieser Theorie aufgebauten Ausdrücke

$$\mathfrak{G}^{(M)} = \frac{1}{c_0} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] \quad (57)$$

$$\text{und} \quad \mathfrak{S}^{(M)} = c_0^2 \mathfrak{G}^{(M)} = c_0 [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]. \quad (58)$$

Die Gl. (55) und (56) besitzen wieder dieselbe Gestalt wie die analogen Beziehungen (21) und (22) bzw. (40) und (41) der „Theorie der Elementarströme“.

Es ist zu erwarten, daß man auch im Rahmen der „Theorie elektrischer und magnetischer Mengen“ einen Impulssatz der Elektrodynamik ableiten kann, der auf das Resultat (55) bzw. (56) für „mathematische“ Abgrenzung führt. Die Feldgleichungen, aus denen der Impulssatz direkt gewonnen wird, setzen ja wieder bei ihrer Ableitung durch Mittelwertbildung der Gleichungen des Mikrobereiches „mathematische“ Begrenzung der Volumselemente voraus. Der Impulssatz folgt jetzt aus den Maxwell'schen Gleichungen, die im Sinne der „Theorie elektrischer und magnetischer Mengen“ umgeformt sind (<sup>7</sup>, Gl. I c bis IV c). Man erhält aus ihnen:

$$\begin{aligned} [\text{rot } \mathfrak{E}, \mathfrak{E}] + [\text{rot } \mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = & -\frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \mathfrak{E} \right] - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \mathfrak{E} \right] + \frac{1}{c_0} [\mathfrak{g} \mathfrak{H}] + \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] + \\ & + \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] = (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E} - \frac{1}{2} \nabla (\mathfrak{E})^2 + (\mathfrak{H} \nabla) \mathfrak{H} - \frac{1}{2} \nabla (\mathfrak{H})^2 = \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] + \\ & + \frac{1}{c_0} [\mathfrak{g} \mathfrak{H}] - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \mathfrak{E} \right] + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]. \end{aligned} \quad (59)$$

Summiert man hiezu

$$\mathfrak{E} (\nabla \mathfrak{E}) + \mathfrak{H} (\nabla \mathfrak{H}) = \varrho'^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E} + \varrho'^{(\text{mgn})} \cdot \mathfrak{H}, \quad (60)$$

so ergibt sich mit Gl. (14)

$$\begin{aligned} \left( \nabla, \mathfrak{E} \mathfrak{E} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} \right) + \left( \nabla, \mathfrak{H} \mathfrak{H} - \frac{1}{2} (\mathfrak{H})^2 \mathbf{I} \right) &= (\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{el})}) + (\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{M})}) = (\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{el}, \text{M})}) = \\ &= \text{div } \mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el}, \text{M})} = \varrho'^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E} + \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] + \varrho'^{(\text{mgn})} \cdot \mathfrak{H} + \frac{1}{c_0} [\mathfrak{g} \mathfrak{H}] - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \mathfrak{E} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c_0} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \mathfrak{f}_{(\text{m})}^{(\text{M})} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c_0} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]. \end{aligned} \quad (61)$$

Der direkt aus den Feldgleichungen des Makrobereiches abgeleitete Impulssatz führt also im Rahmen der „Theorie elektrischer und magnetischer Mengen“ ebenfalls auf die entsprechende, aus dem Kraftansatz Gl. (43) gewonnene Beziehung Gl. (56).

## 2. „Physikalische“ Bereichsabgrenzung

Summiert man zu den Kraftdichten des stationären elektromagnetischen Feldes für „physikalische“ Abgrenzung [<sup>1</sup>, Gl. (29) und (69)] die im allgemeinen Feld zu berücksichtigenden Kraftdichten auf die elektrischen und magnetischen Polarisationsströme, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} &= \varrho_{\text{wa}} \cdot \mathfrak{E} + (\mathfrak{P} \text{ grad}) \mathfrak{E} + \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] + \frac{1}{c_0} [\mathfrak{g} \mathfrak{H}] + (\mathfrak{M} \text{ grad}) \mathfrak{H} - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \mathfrak{E} \right] = \\ &= \mathfrak{E} (\nabla \mathfrak{D}) + (\mathfrak{D} \nabla) \mathfrak{E} - (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E} - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] + \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{H} - (\mathfrak{H} \nabla) \mathfrak{H} + \\ &+ [[\nabla \mathfrak{H}] \mathfrak{H}] - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \mathfrak{E} \right] = (\nabla, \mathfrak{D} \mathfrak{E}) - \frac{1}{2} \nabla (\mathfrak{E})^2 + [\mathfrak{E} [\nabla \mathfrak{E}]] + (\nabla, \mathfrak{B} \mathfrak{H}) - \\ &- \frac{1}{2} \nabla (\mathfrak{H})^2 - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \mathfrak{E} \right] = \left( \nabla, \mathfrak{D} \mathfrak{E} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} \right) + \\ &+ \left( \nabla, \mathfrak{B} \mathfrak{H} - \frac{1}{2} (\mathfrak{H})^2 \mathbf{I} \right) - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]. \end{aligned} \quad (62)$$

Die Definitionen der Tensoren für „physikalische“ Bereichsabgrenzung des elektrischen Feldes und des magnetischen Feldes der „Theorie magnetischer Mengen“ [1, Gl. (32) und (72)]

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} = \mathfrak{E} \mathfrak{D} - \frac{1}{2} (\mathfrak{E})^2 \mathbf{I} = \mathfrak{E} \mathfrak{D} - \frac{1}{2} (\mathfrak{D} \mathfrak{E}) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{E}) \mathbf{I}, \quad (63)$$

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \mathfrak{H} \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{H})^2 \mathbf{I} = \mathfrak{H} \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{H}) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{M} \mathfrak{H}) \mathbf{I} \quad (64)$$

und der daraus gebildete Summentensor des Gesamtfeldes

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} = \mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \{ (\mathfrak{E})^2 + (\mathfrak{H})^2 \} \mathbf{I} \quad (65)$$

ermöglichen wieder, zusammen mit Gl. (57), die schon bekannten Schreibweisen

$$\mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \text{div } \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \text{div } \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} - \frac{\partial \mathfrak{G}^{(\text{M})}}{\partial t} \quad (66)$$

und

$$\text{div } \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} = \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} + \frac{\partial \mathfrak{G}^{(\text{M})}}{\partial t}. \quad (67)$$

#### IV. Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit der Darstellung der körperfesten Kräfte des allgemeinen elektromagnetischen Feldes ist ein gewisser Abschluß bei der Untersuchung des Kraftangriffes dieses Feldes an der Materie erreicht. Es zeigte sich, daß die direkte, körperfeste Kraftdichte die Form

$$\mathfrak{f}_k = \text{div } \mathbf{T}_k - \frac{\partial \mathfrak{G}_k}{\partial t} \quad (68)$$

besitzt [Gl. (21), (40), (55), (66)], wobei je nach der verwendeten Theorie, und innerhalb einer solchen wieder entsprechend den Begrenzungsarten der Materie, verschiedene Tensoren  $\mathbf{T}_k$  [Gl. (20), (39), (54) und (65)] und Impulsdichten  $\mathfrak{G}_k$  [Gl. (23) und (57)] zur Anwendung kommen. Die einzelnen Tensoren und Impulsdichten besitzen einander völlig analoge Gestalt, wobei bezüglich der Tensoren insbesondere auf <sup>1</sup> (Abschn. VII) hingewiesen wird; die Impulsdichten sind dem vektoriellen Produkt der jeweiligen elektrischen und magnetischen Feldstärke der verwendeten Theorie proportional.

Leitet man den Impulssatz im Rahmen der klassischen Maxwell-Theorie ab, so ergibt sich ebenfalls ein Ausdruck der Form Gl. (68), [s. <sup>1</sup>, Gl. (1)], der im Rahmen dieser Theorie als ponderomotorische Kraftdichte gedeutet wird:

$$\mathfrak{f}_{\text{pond}} = \text{div } \mathbf{T} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c_0} [\mathfrak{D} \mathfrak{B}] \quad (69)$$

( $\mathbf{T}$  = klassischer Maxwell-Tensor). Im stationären Feld fällt der zeitabhängige zweite Summand in den Gln. (68) und (69) weg, die direkte und die ponderomotorische Kraftdichte lassen sich allein durch die Divergenz eines Tensors ausdrücken. In diesem Fall läßt sich der Nachweis erbringen, daß man von den direkten Kräften ausgehend zu denselben bewegenden Kräften gelangt, die durch die Divergenz des klassischen Maxwellschen Tensors gegeben sind, wenn man dabei auf die Bedingungen Bedacht nimmt, unter denen die Maxwellschen ponderomotorischen Kräfte angewendet werden dürfen (s. <sup>1</sup>, Abschn. VIII).

Es erscheint aber aussichtslos eine derartige Übereinstimmung auch im allgemeinen Feld nachweisen und damit zeigen zu können, daß die Maxwellsche Hypothese, die ponderomotorischen Kräfte Gl. (69) behalten auch im nichtstationären Feld ihre Gültigkeit, den Tatsachen entspricht. Vom Standpunkt der beiden molekularen Theorien der Materie, der Elektronentheorie („Theorie der Elementarströme“) und



der „Theorie elektrischer und magnetischer Mengen“, aus gesehen enthält die zeitliche Änderung der Maxwellschen Impulsdichte, also der zweite Summand in Gl. (69), zum Teil noch Ausdrücke, die einen Kraftangriff an der Materie liefern, nämlich die Kraftdichte auf die elektrischen und allenfalls auch auf die magnetischen Polarisationsströme. Die tatsächliche bewegende, ponderomotorische Kraft im allgemeinen Feld kann, auch im Rahmen der hier behandelten Theorien der kontinuierlich aus Ladungen und Doppelschichten (Elementarströme) aufgebauten Materie, schon aus folgenden Gründen nicht die einfache Gestalt Gl. (69) besitzen: Die ponderomotorische Kraft besteht bekanntlich aus der im Inneren des Körpers durch das Feld hervorgerufenen direkten, körperfesten und der im jeweiligen Augenblick an der Oberfläche durch die umgebende Materie angreifenden Kraft, es gilt im Falle eines starren Körpers auch im nichtstationären Feld die Gl. (2)

$$\mathfrak{F}_{\text{pond}} = \int_V \mathfrak{f} dV + \oint_A \mathfrak{p} dA. \quad (70)$$

Der direkte Kraftangriff an jedem Volumselement ruft im zeitlich veränderlichen Feld, selbst wenn der betrachtete Körper als starr angenommen werden kann, zumindest in der umgebenden Materie nichtstationäre elastische Spannungen und Deformationen hervor, die sich mit Schallgeschwindigkeit fortpflanzen. (Im stationären Feld genügte begreiflicherweise zur Erfassung der Kräfte der umgebenden Materie die Gleichgewichtsbedingung zwischen elektromagnetischen und mechanischen Volumskräften.) Zur Berechnung der bewegenden Kraft müßten also gemäß Gl. (70) außer der direkten Kraft auf den betreffenden starren Körper auch die im betrachteten Moment auf seine Oberfläche wirkenden Druckkräfte bekannt sein. Diese müßten ihrerseits aus der direkten Kraftdichte auf die umgebende Materie unter Berücksichtigung aller Rand- und Anfangswerte und unter Verwendung der in Frage kommenden mechanischen Materialkonstanten berechnet werden. Es erscheint daher schon auf Grund der Tatsache, daß die ponderomotorischen Maxwell-Kräfte Gl. (69) keinerlei Bezug auf mechanische Materialkonstanten enthalten, unmöglich, daß sie die richtigen bewegenden Kräfte auf einen Körper liefern, wenn sich dieser nicht im Vakuum befindet. An dieser Stelle sei besonders darauf hingewiesen, daß die direkten Volumskräfte zwar allgemeine Gültigkeit im Rahmen der betreffenden Theorie besitzen, im nichtstationären Feld jedoch ihre Integration im ersten Summanden der Gl. (70) nur bei einem starren Körper sinnvoll sein kann.

Es bleibt also noch der einfachere Fall des völlig vom Vakuum umgebenen starren Körpers zu untersuchen. Direkte (körperfeste) und ponderomotorische Kraft müssen jetzt mangels an Kräften angrenzender Materie gleich sein; auch darf kein Unterschied in den Rechenresultaten bestehen, die mit Hilfe der Ausdrücke für „mathematische“ und „physikalische“ Abgrenzung gewonnen werden.

Zunächst soll die Kraft auf den starren Körper mit Hilfe des Gaußschen Satzes umgeformt werden:

$$\mathfrak{F}_k = \int_V \text{div } \mathbf{T}_k dV - \int_V \frac{\partial \mathfrak{G}_k}{\partial t} dV = \oint_A (\mathbf{T}_k d\mathfrak{A}) - \int_V \frac{\partial \mathfrak{G}_k}{\partial t} dV. \quad (71)$$

Das erste, umgeformte Integral gibt jetzt mit Hilfe jedes beliebigen Tensors, also auch des klassischen Maxwell-Tensors, dasselbe Resultat, da an der Oberfläche des Körpers  $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{E}_0$ ,  $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{H}_0$ ,  $\mathfrak{P}_0 = 0$  und  $\mathfrak{M}_0 = 0$  gilt. Der zweite Summand in Gl. (71) liefert jedoch im Rahmen jeder Theorie einen anderen Wert, da die Ausdrücke für die Impulsdichten verschieden sind. Diese sind zwar von der Begrenzungsart unabhängig, so daß im Rahmen der „Theorie der Elementarströme“ oder der „Theorie elektrischer und magnetischer Mengen“ beide Begrenzungsarten erwartungsgemäß auf dasselbe Resultat führen; die direkte und in diesem Fall mit der ponderomotorischen

identische Kraft des nichtstationären Feldes dieser beiden Theorien ist aber verschieden und stimmt schließlich auch mit der der Maxwellschen Theorie nicht überein.

Die neuere Literatur lehnt in der überwiegenden Mehrheit die Maxwellschen Kräfte des nichtstationären Feldes, insbesondere wegen der Impulsdichte dieser Theorie

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c_0} [\mathfrak{D} \mathfrak{B}], \quad (72)$$

ab (vgl. <sup>9</sup>, § 35). Es wird praktisch nur die auf dem Lorentz-Ansatz aufbauende Kraftdichte der „Theorie der Elementarströme“ (und zwar für „mathematische“ Bereichs-abgrenzung) anlässlich mehr formeller theoretischer Betrachtungen (Impulssatz, vierdimensionale Schreibweise u. ä.) verwendet. Dieser Kraftdichte ist aber vorläufig der Ausdruck der „Theorie elektrischer und magnetischer Mengen“ als ebenfalls berechtigt gegenüberzustellen, da einerseits die Feldgleichungen dieser beiden Theorien im Makrobereich dieselben sind und mit den Maxwellschen Gleichungen übereinstimmen; andererseits liefern beide Theorien im stationären Feld in den überprüfbaren Fällen gleiche bewegende Kräfte, die ebenfalls mit denen der Maxwell-Theorie in Übereinstimmung sind. Die Differenzen der drei Theorien hinsichtlich des Kraftangriffes im nichtstationären Feld bedürfen dagegen noch der Klärung, die allerdings auf direktem experimentellem Wege schwer durchführbar erscheint.

(Eingegangen am 5. Februar 1957)

## Beitrag zur nichtlinearen Torsion

Von F. Jindra, Stuttgart

Mit 4 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Mit einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen werden die Lösungsansätze für die reine Torsion prismatischer Stäbe angegeben. Unter Beschränkung auf einfache Formen der Schubfunktion wird die Weiterbehandlung der aufgestellten Differentialgleichung ermöglicht. Die Lösungen betreffen die Querschnittsformen: Kreis, Ellipse, gleichseitiges Dreieck und Quadrat. Die Zahlenrechnungen ergeben, daß sich die zusätzlichen Spannungen infolge der Nichtlinearität bei diesen Querschnitten etwa in gleichen Grenzen halten.

### I. Einleitung

Die Aufgabe der Elastomechanik ist die Ermittlung der inneren Kräfte und der Formänderungen eines in bestimmter Weise belasteten und gelagerten elastischen Körpers. Zur Lösung verfügen wir über die Gleichgewichtsbedingungen, den geometrischen Zusammenhang zwischen den Verzerrungsgrößen und den Ableitungen der Verschiebungen und das Elastizitätsgesetz. Die klassische Elastizitätstheorie beruht auf dem Hookeschen Gesetz, das einen linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen voraussetzt. Dabei wird die Gültigkeit des Gesetzes auf unendlich kleine Verzerrungen beschränkt. Manche zähe metallische Werkstoffe, wie Kupfer, Bronze, zäher Stahl, zeigen aber schon bei diesen kleinen Verzerrungen ein nichtlineares Verhalten. Hier benützen wir deshalb ein nichtlineares Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen, das dem elastischen Verhalten solcher Werkstoffe gerecht wird.

In rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  sind die von den Schubspannungen hervorgerufenen Winkeländerungen nach dem allgemeinen nichtlinearen Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen<sup>1</sup> gegeben durch die Ausdrücke:

$$\psi_{xy} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{xy}, \quad \psi_{yz} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{yz}, \quad \psi_{zx} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{zx}. \quad (1)$$

<sup>1</sup> H. Kauderer: Ing.-Arch. 17, 450 (1949). — C. B. Biezeno und R. Grammel: Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. I, S. 35. Berlin, 1953.

Dabei bedeuten  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  die Schubspannungen,  $\psi_{xy}$ ,  $\psi_{yz}$ ,  $\psi_{zx}$  die Winkeländerungen,  $G$  den Schubmodul,  $t_0^2$  die dimensionslose Spannungsgröße

$$t_0^2 = \frac{2}{3G^2} \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_0)^2 + (\sigma_y - \sigma_0)^2 + (\sigma_z - \sigma_0)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right\}. \quad (2)$$

Weiter bedeuten hier  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  die Normalspannungen,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  die Dehnungen und  $\sigma_0$  den Mittelwert  $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ . Die Schubfunktion  $g(t_0^2)$  wird als Potenzreihe der Spannungsgröße (2) angesetzt:

$$g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2 + g_4 t_0^4 + g_6 t_0^6 + \dots \quad (3)$$

Die Gl. (1) lassen sich umkehren. Man erhält

$$\tau_{xy} = G \gamma(\psi_0^2) \psi_{xy}, \quad \tau_{yz} = G \gamma(\psi_0^2) \psi_{yz}, \quad \tau_{zx} = G \gamma(\psi_0^2) \psi_{zx}, \quad (4)$$

wo die Dehnungsgröße  $\psi_0^2$  durch

$$\psi_0^2 = \frac{2}{3} \{ 2 [(\varepsilon_x - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_0)^2] + \psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2 \} \quad (5)$$

mit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

gegeben ist. Die Scherungsfunktion  $\gamma(\psi_0^2)$  nimmt als Potenzreihe von  $\psi_0^2$  die Gestalt an:

$$\gamma(\psi_0^2) = 1 + \gamma_2 \psi_0^2 + \gamma_4 \psi_0^4 + \gamma_6 \psi_0^6 + \dots \quad (6)$$

Nach den Regeln über die Umkehrung von Potenzreihen gilt für die Koeffizienten von (6) und (3)

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= -g_2, & \gamma_4 &= 3g_2^2 - g_4, \\ \gamma_6 &= -12g_2^3 + 8g_2g_4 - g_6, \\ \gamma_8 &= 55g_2^4 - 55g_2^2g_4 + 5g_4^2 + 10g_2g_6 - g_8, \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Schubfunktion (3) bzw. die Scherungsfunktion (6) bestimmen also mit  $G$  zusammen das elastische Verhalten des Werkstoffes. Ihr Verlauf ist experimentell durch geeignete Versuche zu ermitteln.

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit den Anwendungen des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes für kleine Verzerrungen auf das Problem der reinen Torsion prismatischer Stäbe. Wir leiten zuerst allgemein die Differentialgleichung für die Verwölbung und die Spannungsfunktion her. Wir betrachten kurz die exakte Lösung für den Kreisquerschnitt. Das elastische Verhalten von zähem Flußstahl bei einem Torsionsversuch wird als Beispiel angegeben. Unter Beschränkung auf bestimmte einfache Formen der Schubfunktion (3) behandeln wir den elliptischen und den dreieckförmigen Querschnitt. Zum Schluß berechnen wir näherungsweise die maximalen Schubspannungen im quadratischen Querschnitt. Die numerische Auswertung der Ergebnisse ergibt Änderungen der Spannungsverteilung gegenüber der linearen Theorie und insbesondere einen Abbau der Spannungsspitzen durch Abweichungen des Elastizitätsgesetzes von der Linearität.

## II. Die reine Torsion prismatischer Stäbe

Wir behandeln hier die Torsion eines zur  $z$ -Achse parallelen prismatischen Stabes von beliebigem Querschnitt unter einem Verdrillungsmoment  $M$ . Für das reine Torsionsproblem<sup>2</sup> sind bekanntlich nur die Schubspannungen  $\tau_{yz}$  und  $\tau_{zx}$  beizubehalten und alle anderen Spannungen gleich Null zu setzen, also

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{yz} &= \tau_y(x, y), \quad \tau_{zx} = \tau_x(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

<sup>2</sup> Vgl. z. B. S. Timoshenko: Theory of Elasticity, 1. Aufl., S. 229. New York. 1934.



Dann bleibt als einzige Gleichgewichtsbedingung übrig

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

wobei die Volumkräfte vernachlässigt werden. Die Randbedingung ist die Forderung tangentialen Verlaufs der Schubspannungen. Wenn  $dx$ ,  $dy$  die Projektionen des Bogenelements  $ds$  der Randkurve des Stabquerschnitts sind, so muß längs des Randes gelten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_y}{\tau_x} \quad \text{oder} \quad \tau_x \frac{dy}{ds} - \tau_y \frac{dx}{ds} = 0. \quad (10)$$

Die Verschiebungen nach den Achsenrichtungen seien  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Wegen (8) werden die Verzerrungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \psi_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \psi_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

woraus die Verträglichkeitsbedingung des Verzerrungszustandes

$$\frac{\partial \psi_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} = \text{konst.} \quad (12)$$

folgt. Für die Aufstellung der Gleichungen braucht man noch den Zusammenhang zwischen den Spannungs- und den Verzerrungsgrößen. Das nichtlineare Elastizitätsgesetz liefert nach (1) bzw. (4) die Beziehungen

$$\psi_{yz} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_y, \quad \psi_{zx} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_x \quad (13)$$

mit

$$t_0^2 = \frac{2}{3 G^2} (\tau_x^2 + \tau_y^2) \quad (13a)$$

oder

$$\tau_y = G \gamma(\psi_0^2) \psi_{yz}, \quad \tau_x = G \gamma(\psi_0^2) \psi_{zx} \quad (14)$$

mit

$$\psi_0^2 = \frac{2}{3} (\psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2). \quad (14a)$$

Für das Integrationsproblem ergeben sich folgende zwei Fassungen:

a) Die Differentialgleichung für die Verwölbung. Die Verdrehung um die  $z$ -Achse für die Längeneinheit des Stabes sei  $\omega$ . Wir machen den üblichen Ansatz der linearen Theorie

$$u = -\omega y z, \quad v = \omega x z, \quad w = \omega \varphi(x, y), \quad (15)$$

wo  $\varphi(x, y)$  die Verwölbung des Querschnitts ist, die für alle Querschnitte gleich ausfällt.

Damit wird nach (11) und (14)

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= G \gamma(\psi_0^2) \omega \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_y &= G \gamma(\psi_0^2) \omega \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

mit

$$\psi_0^2 = \frac{2}{3} \omega^2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - 2y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right]. \quad (17)$$

Führen wir diese Werte in (9) ein, so entsteht die folgende nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Verwölbung  $\varphi(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \gamma(\psi_0^2) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{4}{3} \omega^2 \frac{d\gamma(\psi_0^2)}{d(\psi_0^2)} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Die Randbedingung (10) nimmt für  $\varphi$  die Form an:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2). \quad (19)$$

Die Größe des Torsionsmomentes  $M$  erhalten wir durch Summation der Momente der Schubspannungen um  $z$  über dem Querschnitt:

$$\begin{aligned} M &= \iint (\tau_y x - \tau_x y) dx dy = \\ &= G \omega \iint \gamma(\psi_0^2) \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right) dx dy. \end{aligned} \quad (20)$$

b) Die Differentialgleichung für die Spannungsfunktion. Zu einer direkten Ermittlung der Spannungsverteilung gelangt man durch den Ansatz einer Spannungsfunktion  $\Phi(x, y)$

$$\tau_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (21)$$

wodurch die Gleichgewichtsbedingung (9) identisch erfüllt ist. Dann wird nach (13)

$$\psi_{yy} = -\frac{1}{G} g(t_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \psi_{xx} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (22)$$

mit

$$t_0^2 = \frac{2}{3 G^2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (23)$$

Setzt man (22) mit (23) in (12) ein, so folgt unter Beachtung von (11) und (15) die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Spannungsfunktion  $\Phi(x, y)$

$$\begin{aligned} g(t_0^2) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) &+ \frac{4}{3} \frac{1}{G^2} \frac{dg(t_0^2)}{d(t_0^2)} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] = -2 G \omega. \end{aligned} \quad (24)$$

Die Randbedingung ist für einfach zusammenhängende Querschnitte

$$\Phi = 0 \quad (25)$$

am Rand. Das Torsionsmoment errechnet sich dann zu

$$M = \iint (\tau_y x - \tau_x y) dx dy = 2 \iint \Phi(x, y) dx dy. \quad (26)$$

### III. Der Kreisquerschnitt

Zuerst behandeln wir kurz den Stab mit kreisförmigem Querschnitt<sup>3</sup>, für den sich an Hand der Gl. (16) bis (20) eine genaue Lösung einfach angeben läßt. Hierzu setzt man

$$\varphi(x, y) \equiv 0,$$

das heißt der Querschnitt bleibt eben. Gemäß (16) folgen die Spannungen

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= -G \gamma(\psi_0^2) \omega y, \\ \tau_y &= G \gamma(\psi_0^2) \omega x \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

mit

$$\psi_0^2 = \frac{2}{3} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

oder die resultierende Schubspannung

$$\tau(r) = G \gamma \left( \frac{2}{3} \omega^2 r^2 \right) \omega r, \quad (28)$$

<sup>3</sup> Vgl. auch H. Kauderer, a. a. O., S. 461.

wo  $r$  den Nullpunktastand bedeutet. Die Randlinie erweist sich nach (19) als Kreis. Mit Hilfe von (20) findet man das Torsionsmoment

$$M = 2 \pi G \omega \int_0^R \gamma \left( \frac{2}{3} \omega^2 r^2 \right) r^3 dr = \pi G \omega \left( \frac{1}{2} R^4 + \frac{2}{9} \gamma_2 \omega^2 R^6 + \frac{1}{9} \gamma_4 \omega^4 R^8 + \dots \right), \quad (29)$$

wenn  $R$  der Halbmesser der Welle ist. Die Umkehrung der Beziehung (28) wird

$$\psi(r) = \omega r = \frac{1}{G} g \left( \frac{2}{3} \frac{\tau^2}{G^2} \right) \tau. \quad (30)$$

Als Beispiel ist das Ergebnis eines Torsionsversuches an Hohlstäben aus Flußstahl in einem Schubspannungs-Verdrehungsdiagramm in Abb. 1 wiedergegeben<sup>4</sup>. Der lineare, idealisierte Verlauf der Schubspannung ist als Gerade gestrichelt eingetragen. Man findet daraus  $G = 0.87 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . Wertet man die Versuchsergebnisse nach (30) aus, so kann innerhalb der Versuchsgenauigkeit die Schubfunktion  $g(t_0^2)$  in guter Näherung durch die ersten zwei Glieder der Reihenentwicklung (3) dargestellt werden, also  $g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2$  mit  $g_2 = 0.065 \cdot 10^6$ .

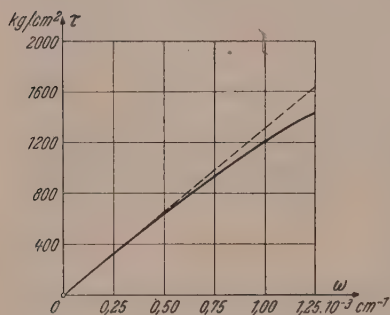


Abb. 1. Schubspannungs-Verdrehungsdiagramm für Flußstahl

#### IV. Der elliptische Querschnitt

Die Auflösung der nichtlinearen Randwertaufgaben (24) mit (25) für die Spannungsfunktion macht bei willkürlich vorgegebenen Schubfunktionen große mathematische Schwierigkeiten. Im folgenden wollen wir uns deshalb auf bestimmte einfache Formen der Schubfunktion beschränken, was für praktische Fälle ausreicht.

Für den Sonderfall, daß die Funktion  $g(t_0^2)$  in der Form

$$g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2 \quad (31)$$

darstellbar ist, vereinfacht sich die Differentialgleichung (24) zu

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \varepsilon [(3 \Phi_x^2 + \Phi_y^2) \Phi_{xx} + 4 \Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} + (\Phi_x^2 + 3 \Phi_y^2) \Phi_{yy}] = -2G\omega, \quad (32)$$

wobei zur Abkürzung

$$\varepsilon = \frac{2g_2}{3G^2} \quad (33)$$

eingeführt wird. Die Stoffzahl (33) kennzeichnet hier allein die Abweichung vom Hookeschen Gesetz.

Zur genäherten Integration von (32) wenden wir die Methode der Störungsrechnung an. Eine notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Verfahrens ist, daß der gewählte Störungsparameter auf hinreichend kleine Werte beschränkt bleibt, um die Konvergenz des Verfahrens zu verbürgen. Man setzt hier die Lösung des Problems als Potenzreihe im Störungsparameter  $\varepsilon$  an

$$\Phi(x, y) = \Phi^{(0)}(x, y) + \varepsilon \Phi^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(x, y) + \dots \quad (34)$$

Indem man (34) in (32) einträgt, ordnet und die Koeffizienten aufeinanderfolgenden Potenzen von  $\varepsilon$  Null setzt, entsteht eine Folge von linearen, inhomogenen Differentialgleichungen, die man der Reihe nach integrieren kann.

<sup>4</sup> Nach M. Roš und A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr, S. 26. Zürich. 1926.



Die von  $\varepsilon$  freien Glieder liefern die Differentialgleichung der ungestörten Aufgabe

$$\Delta \Phi^{(0)} = -2 G \omega, \quad (35)$$

wo  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  den Laplaceschen Operator bedeutet. Dabei ist die nullte Funktion  $\Phi^{(0)}(x, y)$  die bekannte Lösung der linearen Theorie für  $\varepsilon = 0$ . Der Koeffizient von  $\varepsilon$  ergibt als Differentialgleichung für  $\Phi^{(1)}(x, y)$ :

$$\Delta \Phi^{(1)} + (3 \Phi_x^{(0)2} + \Phi_y^{(0)2}) \Phi_{xx}^{(0)} + 4 \Phi_x^{(0)} \Phi_y^{(0)} \Phi_{xy}^{(0)} + (\Phi_x^{(0)2} + 3 \Phi_y^{(0)2}) \Phi_{yy}^{(0)} = 0. \quad (36)$$

Für die Funktion  $\Phi^{(2)}(x, y)$  zweiter Ordnung folgt

$$\begin{aligned} \Delta \Phi^{(2)} + (3 \Phi_x^{(0)2} + \Phi_y^{(0)2}) \Phi_{xx}^{(1)} + 4 \Phi_x^{(0)} \Phi_y^{(0)} \Phi_{xy}^{(1)} + (\Phi_x^{(0)2} + 3 \Phi_y^{(0)2}) \Phi_{yy}^{(1)} + \\ + 2 (3 \Phi_x^{(0)} \Phi_{xx}^{(0)} + 2 \Phi_y^{(0)} \Phi_{xy}^{(0)} + \Phi_x^{(0)} \Phi_{yy}^{(0)}) \Phi_x^{(1)} + \\ + 2 (\Phi_y^{(0)} \Phi_{xx}^{(0)} + 2 \Phi_x^{(0)} \Phi_{xy}^{(0)} + 3 \Phi_y^{(0)} \Phi_{yy}^{(0)}) \Phi_y^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Für sämtliche Funktionen  $\Phi^{(0)}$ ,  $\Phi^{(1)}$ ,  $\Phi^{(2)}$  usw. gilt die homogene Randbedingung (25). Die Spannungskomponenten stellen sich als Potenzreihen in  $\varepsilon$  dar; denn durch Differentiation von (34) erhält man gemäß (21) die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \tau_x^{(0)} + \varepsilon \tau_x^{(1)} + \varepsilon^2 \tau_x^{(2)} + \dots, \\ \tau_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \tau_y^{(0)} + \varepsilon \tau_y^{(1)} + \varepsilon^2 \tau_y^{(2)} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

wo

$$\tau_x^{(0)} = \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial y}, \quad \tau_x^{(1)} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y}$$

usw. die partiellen Ableitungen der Funktionen bedeuten. In gleicher Form läßt sich auch das Torsionsmoment (26) schreiben:

$$M = M^{(0)} + \varepsilon M^{(1)} + \varepsilon^2 M^{(2)} + \dots \quad (39)$$

durch die Festsetzung

$$M^{(0)} = 2 \int \int \Phi^{(0)} dx dy, \quad M^{(1)} = 2 \int \int \Phi^{(1)} dx dy \quad \text{usw.}$$

Ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Randellipse, so wird in der linearen Theorie der Spannungszustand im gedrillten Stab mit elliptischem Querschnitt durch die Spannungsfunktion nullter Ordnung<sup>5</sup>

$$\Phi^{(0)} = c (x^2 + \varrho^2 y^2 - a^2) \quad (40)$$

beschrieben, wobei zur Abkürzung

$$c = -\frac{G \omega}{1 + \varrho^2} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{a}{b}$$

gesetzt werden.

Daraus folgen gemäß (21) die Spannungen nullter Ordnung

$$\tau_x^{(0)} = 2 c \varrho^2 y, \quad \tau_y^{(0)} = -2 c x \quad (41)$$

und nach (26) das Torsionsmoment nullter Ordnung

$$M^{(0)} = -\frac{1}{\varrho} \pi c a^4. \quad (42)$$

Für die Näherungsfunktion erster Ordnung erhält man nach (36) die Gleichung

$$\Delta \Phi^{(1)} = -8 c^3 [(3 + \varrho^2) x^2 + (1 + 3 \varrho^2) \varrho^4 y^2] \quad (43)$$

<sup>5</sup> Vgl. S. Timoshenko, a. a. O., S. 234.

mit der Randbedingung

$$\Phi^{(1)} = 0 \text{ (am Rand).}$$

Man macht den die Randbedingung befriedigenden Lösungsansatz

$$\Phi^{(1)} = -8c^3(x^2 + \varrho^2 y^2 - a^2)(A_2 x^2 + A_1 \varrho^2 y^2 + A_0 a^2). \quad (44)$$

Durch Einsetzen findet man die Festwerte

$$A_2 = \frac{1}{n_1} (3 + 19\varrho^2 + 5\varrho^4 - 3\varrho^6),$$

$$A_1 = \frac{1}{n_1} (-3 + 5\varrho^2 + 19\varrho^4 + 3\varrho^6),$$

$$A_0 = \frac{1}{n_1(1 + \varrho^2)} (3 + 16\varrho^2 + 10\varrho^4 + 16\varrho^6 + 3\varrho^8)$$

mit

$$n_1 = 12(1 + 6\varrho^2 + \varrho^4).$$

Die Verbesserungsglieder erster Ordnung der Spannungen errechnen sich dann nach (38) zu

$$\left. \begin{aligned} \tau_x^{(1)} &= -\frac{8}{3} \frac{c^3 \varrho^2 y}{1 + 6\varrho^2 + \varrho^4} \left[ 12(1 + \varrho^2) \varrho^2 x^2 + (-3 + 5\varrho^2 + 19\varrho^4 + 3\varrho^6) \varrho^2 y^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 + \varrho^2} (1 - \varrho^2) (3 + \varrho^2) (1 + 3\varrho^2) a^2 \right], \\ \tau_y^{(1)} &= \frac{8}{3} \frac{c^3 x}{1 + 6\varrho^2 + \varrho^4} \left[ (3 + 19\varrho^2 + 5\varrho^4 - 3\varrho^6) x^2 + 12(1 + \varrho^2) \varrho^4 y^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1 + \varrho^2} (1 - \varrho^2) (3 + \varrho^2) (1 + 3\varrho^2) \varrho^2 a^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

und für die Verbesserung erster Ordnung des Torsionsmomentes ergibt sich nach (39)

$$M^{(1)} = 8 \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=\frac{1}{\varrho} \sqrt{a^2 - x^2}} \Phi^{(1)}(x, y) dx dy = \frac{2}{3} \frac{3 + 2\varrho^2 + 3\varrho^4}{\varrho(1 + \varrho^2)} \pi c^3 a^6. \quad (46)$$

Nunmehr kann die Differentialgleichung für die Näherungsfunktion  $\Phi^{(2)}$  zweiter Ordnung nach (37) angeschrieben werden. Sie lautet:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi^{(2)} &= \frac{32}{3} \frac{c^5}{1 + 6\varrho^2 + \varrho^4} \\ &\left[ (45 + 291\varrho^2 + 125\varrho^4 - 23\varrho^6 - 6\varrho^8) x^4 + 108(1 + \varrho^2)^3 \varrho^4 x^2 y^2 + \right. \\ &\quad + (-6 - 23\varrho^2 + 125\varrho^4 + 291\varrho^6 + 45\varrho^8) \varrho^6 y^4 - \\ &\quad - \frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2} (3 + \varrho^2) (8 + 26\varrho^2 + 6\varrho^4) \varrho^2 a^2 x^2 + \\ &\quad \left. + \frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2} (1 + 3\varrho^2) (6 + 26\varrho^2 + 8\varrho^4) \varrho^4 a^2 y^2 \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Für die gesuchte Funktion wählen wir den am Rand verschwindenden Ansatz

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} &= 32c^5(x^2 + \varrho^2 y^2 - a^2)(B_5 x^4 + B_4 \varrho^2 x^2 y^2 + B_3 \varrho^4 y^4 + \\ &\quad + B_2 a^2 x^2 + B_1 \varrho^2 a^2 y^2 + B_0 a^4). \end{aligned} \quad (48)$$

Nach einiger Zwischenrechnung findet man

$$B_5 = \frac{1}{n_2} (45 + 921\varrho^2 + 4226\varrho^4 + 1661\varrho^6 - 1024\varrho^8 - 114\varrho^{10} + 45\varrho^{12}),$$

$$B_4 = -\frac{1}{n_2} (45 + 651\varrho^2 - 1129\varrho^4 - 10654\varrho^6 - 1129\varrho^8 + 651\varrho^{10} + 45\varrho^{12}),$$

$$B_3 = \frac{1}{n_2} (45 - 114 \varrho^2 - 1024 \varrho^4 + 1661 \varrho^6 + 4226 \varrho^8 + 921 \varrho^{10} + 45 \varrho^{12}),$$

$$B_2 = \frac{1}{n_2(1 + \varrho^2)} (45 + 1176 \varrho^2 + 9483 \varrho^4 + 27742 \varrho^6 + 24785 \varrho^8 + \\ + 22330 \varrho^{10} + 10129 \varrho^{12} - 2198 \varrho^{14} - 1242 \varrho^{16} - 90 \varrho^{18}),$$

$$B_1 = \frac{1}{n_2(1 + \varrho^2)} (-90 - 1242 \varrho^2 - 2198 \varrho^4 + 10129 \varrho^6 + 22330 \varrho^8 + \\ + 24785 \varrho^{10} + 27742 \varrho^{12} + 9483 \varrho^{14} + 1176 \varrho^{16} + 45 \varrho^{18}),$$

$$B_0 = \frac{1}{n_2(1 + \varrho^2)^2} (45 + 1086 \varrho^2 + 8241 \varrho^4 + 25544 \varrho^6 + \\ + 34914 \varrho^8 + 44660 \varrho^{10} + 34914 \varrho^{12} + 25544 \varrho^{14} + 8241 \varrho^{16} + 1086 \varrho^{18} + 45 \varrho^{20})$$

mit

$$n_2 = 90(1 + 6\varrho^2 + \varrho^4)(1 + 14\varrho^2 + \varrho^4).$$

Hiermit leiten sich die Verbesserungen zweiter Ordnung der Schubspannungen ab:

$$\left. \begin{aligned} \tau_x^{(2)} &= 64 c^5 \varrho^2 y [(B_5 + B_4) x^4 + 2(B_4 + B_3) \varrho^2 x^2 y^2 + \\ &\quad + 3B_3 \varrho^4 y^4 + (B_1 + B_2 - B_4) a^2 x^2 + 2(B_1 - B_3) \varrho^2 a^2 y^2 + (B_0 - B_1) a^4], \\ \tau_y^{(2)} &= -64 c^5 x [3B_5 x^4 + 2(B_5 + B_4) \varrho^2 x^2 y^2 + \\ &\quad + (B_4 + B_3) \varrho^4 y^4 + 2(B_2 - B_5) a^2 x^2 + (B_1 + B_2 - B_4) \varrho^2 a^2 y^2 + (B_0 - B_2) a^4]. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Mit den gefundenen Werten der Konstanten nimmt die Verbesserung zweiter Ordnung des Torsionsmomentes die Form an:

$$M^{(2)} = -\frac{1}{3} \frac{45 + 318 \varrho^2 + 467 \varrho^4 + 644 \varrho^6 + 467 \varrho^8 + 318 \varrho^{10} + 45 \varrho^{12}}{\varrho(1 + \varrho^2)^2(1 + 6\varrho^2 + \varrho^4)} \pi c^5 a^8. \quad (50)$$

Als Zahlenbeispiel betrachten wir zähen Stahl von Ziffer 3, für welchen man  $\varepsilon = 0.0573 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^4/\text{kg}^2$  errechnet. Es sei:  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $\varrho = 2$ ,  $\omega = 0.46 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ .

Mit diesen Werten ergibt die nach dem dritten Glied abgebrochene Näherungslösung der Spannungen gemäß (38), (41), (45) und (49) die maximale Schubspannung am Endpunkt der kleinen Halbachse  $\tau_{\max} = -1452 \text{ kg/cm}^2$ . Die lineare Theorie liefert hier  $\tau_{\max}^{(0)} = -1600 \text{ kg/cm}^2$ . Die maximale Schubspannung verringert sich demnach gegenüber dem Wert der linearen Theorie bei gleichem Verdrehungswinkel um 9.3%. Wir ermitteln noch das Torsionsmoment. Wir erhalten  $M^{(0)} = 785 \text{ mkg}$ , während für die Näherungslösung nach (39), (42), (46) und (50)  $M = 738 \text{ mkg}$  folgt, also eine Abnahme um 6.1% gegenüber dem Wert  $M^{(0)}$  der linearen Theorie. In Abb. 2 ist der Verlauf der Schubspannungen längs der Halbachsen maßstäblich aufgetragen. Gestrichelt eingezeichnet ist das Ergebnis der linearen Theorie. Man erkennt einen Abbau der Spannungsspitzen an den Rändern infolge der Nichtlinearität.

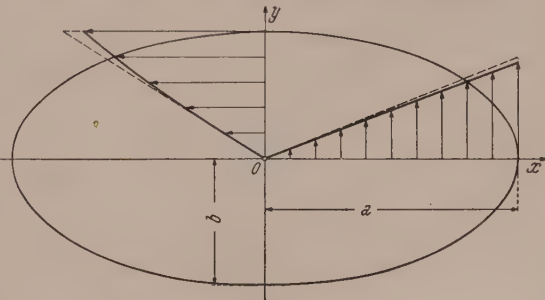


Abb. 2.

Schubspannungen in elliptischem Querschnitt

Nun wollen wir uns noch dem Sonderfall zuwenden, daß die Reihenentwicklung (3) wenigstens nach dem dritten Glied abgebrochen werden kann, also die Schubfunktion in der Form

$$g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2 + g_4 t_0^4 \quad (51)$$



darstellbar ist. Aus (24) wird dann

$$\begin{aligned} \Delta \Phi + \varepsilon [(3 \Phi_x^2 + \Phi_y^2) \Phi_{xx} + 4 \Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} + (\Phi_x^2 + 3 \Phi_y^2) \Phi_{yy}] + \\ + \bar{\varepsilon} [(5 \Phi_x^4 + 6 \Phi_x^2 \Phi_y^2 + \Phi_y^4) \Phi_{xx} + 8 \Phi_x \Phi_y (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) \Phi_{xy} + \\ + (\Phi_x^4 + 6 \Phi_x^2 \Phi_y^2 + 5 \Phi_y^4) \Phi_{yy}] = -2G\omega, \end{aligned} \quad (52)$$

wenn folgende Stoffzahlen eingeführt werden:

$$\varepsilon = \frac{2g_2}{3G^2} \quad \text{und} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{4g_4}{9G^4}. \quad (53)$$

Um die genäherte Lösung der Gl. (52) zu erhalten, erweitern wir den Ansatz (34) der Störungsrechnung folgendermaßen:

$$\Phi(x, y) = \Phi^{(0)}(x, y) + \varepsilon \Phi^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(x, y) + \dots + \bar{\varepsilon} \bar{\Phi}^{(1)}(x, y) + \dots \quad (54)$$

Geht man mit (54) in (52) ein und entwickelt nach Potenzen von  $\varepsilon$  und  $\bar{\varepsilon}$ , so folgen wieder durch Vergleich gleichhoher Potenzen die Gleichungen für die Koeffizientenfunktionen. Die Bestimmungsgleichungen für  $\Phi^{(0)}(x, y)$ ,  $\Phi^{(1)}(x, y)$  und  $\Phi^{(2)}(x, y)$  sind bereits in (35) bis (37) angeschrieben. Berücksichtigt man dabei die Glieder, die  $\bar{\varepsilon}$  in erster Potenz enthalten, so entsteht für  $\bar{\Phi}^{(1)}(x, y)$  die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Phi}^{(1)} + (5 \Phi_x^{(0)4} + 6 \Phi_x^{(0)2} \Phi_y^{(0)2} + \Phi_y^{(0)4}) \Phi_{xx}^{(0)} + \\ + 8 \Phi_x^{(0)} \Phi_y^{(0)} (\Phi_x^{(0)2} + \Phi_y^{(0)2}) \Phi_{xy}^{(0)} + \\ + (\Phi_x^{(0)4} + 6 \Phi_x^{(0)2} \Phi_y^{(0)2} + 5 \Phi_y^{(0)4}) \Phi_{yy}^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

mit der Randbedingung

$$\bar{\Phi}^{(1)} = 0 \quad (\text{am Rand}).$$

Wir betrachten weiter den elliptischen Querschnitt. Führen wir (40) in (55) ein, so erhalten wir jetzt für die zweite Verbesserung erster Ordnung  $\bar{\Phi}^{(1)}$  der Spannungsfunktion die Differentialgleichung

$$\Delta \bar{\Phi}^{(1)} = -32c^5 [(5 + \varrho^2)x^4 + 6(1 + \varrho^2)\varrho^4 x^2 y^2 + (1 + 5\varrho^2)\varrho^8 y^4], \quad (56)$$

welche wir mit Hilfe des die Randbedingung befriedigenden Ansatzes

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^{(1)} = -32c^5 (x^2 + \varrho^2 y^2 - a^2) (C_5 x^4 + C_4 \varrho^2 x^2 y^2 + \\ + C_3 \varrho^4 y^4 + C_2 a^2 x^2 + C_1 \varrho^2 a^2 y^2 + C_0 a^4) \end{aligned} \quad (57)$$

zu erfüllen versuchen. Wie man durch Einsetzen dieses Wertes in (56) leicht nachrechnet, ist

$$\begin{aligned} C_5 &= \frac{1}{m_1} (5 + 71 \varrho^2 + 18 \varrho^4 - 19 \varrho^6 + 5 \varrho^8), \\ C_4 &= -\frac{1}{m_1} (5 + 56 \varrho^2 - 282 \varrho^4 + 56 \varrho^6 + 5 \varrho^8), \\ C_3 &= \frac{1}{m_1} (5 - 19 \varrho^2 + 18 \varrho^4 + 71 \varrho^6 + 5 \varrho^8), \\ C_2 &= \frac{1}{m_2} (5 + 101 \varrho^2 + 434 \varrho^4 + 52 \varrho^6 + 155 \varrho^8 - 97 \varrho^{10} - 10 \varrho^{12}), \\ C_1 &= \frac{1}{m_2} (-10 - 97 \varrho^2 + 155 \varrho^4 + 52 \varrho^6 + 434 \varrho^8 + 101 \varrho^{10} + 5 \varrho^{12}), \\ C_0 &= \frac{1}{m_2} (5 + 86 \varrho^2 + 251 \varrho^4 - 44 \varrho^6 + 251 \varrho^8 + 86 \varrho^{10} + 5 \varrho^{12}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} m_1 &= 30 (1 + 14 \varrho^2 + \varrho^4), \\ m_2 &= 30 (1 + 14 \varrho^2 + \varrho^4) (1 + 6 \varrho^2 + \varrho^4). \end{aligned}$$

Die zugehörigen Verbesserungen der Spannungen nehmen hiermit folgende Werte an:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_x^{(1)} &= \bar{\Phi}_y^{(1)} = -64 c^5 \varrho^2 y [(C_5 + C_4) x^4 + \\ &\quad + 2(C_4 + C_3) \varrho^2 x^2 y^2 + 3 C_3 \varrho^4 y^4 + (C_1 + C_2 - C_4) a^2 x^2 + \\ &\quad + 2(C_1 - C_3) \varrho^2 a^2 y^2 + (C_0 - C_1) a^4], \\ \bar{\tau}_y^{(1)} &= -\bar{\Phi}_x^{(1)} = 64 c^5 x [3 C_5 x^4 + 2(C_5 + C_4) \varrho^2 x^2 y^2 + \\ &\quad + (C_4 + C_3) \varrho^4 y^4 + 2(C_2 - C_5) a^2 x^2 + \\ &\quad + (C_1 + C_2 - C_4) \varrho^2 a^2 y^2 + (C_0 - C_2) a^4]. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Das von diesen Verbesserungen erzeugte Torsionsmoment berechnet sich zu

$$\bar{M}^{(1)} = 8 \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=\frac{1}{\varrho} \sqrt{a^2 - x^2}} \bar{\Phi}^{(1)}(x, y) dx dy = \frac{1}{\varrho} (5 - 2 \varrho^2 + 5 \varrho^4) \pi c^5 a^8. \quad (59)$$

Wir spezialisieren uns jetzt auf den kreisförmigen Querschnitt, setzen  $\varrho = 1$  und erhalten nach (40), (44), (48) und (57)

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} &= -\frac{1}{2} G \omega (x^2 + y^2 - a^2), & \Phi^{(1)} &= \frac{1}{4} G^3 \omega^3 [(x^2 + y^2)^2 - a^4], \\ \Phi^{(2)} &= -\frac{1}{2} G^5 \omega^5 [(x^2 + y^2)^3 - a^6], & \bar{\Phi}^{(1)} &= \frac{1}{6} G^5 \omega^5 [(x^2 + y^2)^3 - a^6]; \end{aligned}$$

ferner nach (41), (45), (49) und (58)

$$\begin{aligned} \tau_x^{(0)} &= -G \omega y, & \tau_y^{(0)} &= G \omega x, \\ \tau_x^{(1)} &= G^3 \omega^3 (x^2 + y^2) y, & \tau_y^{(1)} &= -G^3 \omega^3 (x^2 + y^2) x, \\ \tau_x^{(2)} &= -3 G^5 \omega^5 (x^2 + y^2)^2 y, & \tau_y^{(2)} &= 3 G^5 \omega^5 (x^2 + y^2)^2 x, \\ \bar{\tau}_x^{(1)} &= G^5 \omega^5 (x^2 + y^2)^2 y, & \bar{\tau}_y^{(1)} &= -G^5 \omega^5 (x^2 + y^2)^2 x; \end{aligned}$$

und schließlich nach (42), (46), (50) und (59)

$$\begin{aligned} M^{(0)} &= \frac{1}{2} \pi G \omega a^4, & M^{(1)} &= -\frac{1}{3} \pi G^3 \omega^3 a^6, \\ M^{(2)} &= \frac{3}{4} \pi G^5 \omega^5 a^8, & \bar{M}^{(1)} &= -\frac{1}{4} \pi G^5 \omega^5 a^8. \end{aligned}$$

Die Näherungslösungen der Spannungen und des Torsionsmomentes sind also

$$\begin{aligned} \tau_x &= -G \omega y [1 - \varepsilon G^2 \omega^2 (x^2 + y^2) + (3 \varepsilon^2 - \bar{\varepsilon}) G^4 \omega^4 (x^2 + y^2)^2], \\ \tau_y &= G \omega x [1 - \varepsilon G^2 \omega^2 (x^2 + y^2) + (3 \varepsilon^2 - \bar{\varepsilon}) G^4 \omega^4 (x^2 + y^2)^2], \\ M &= \pi G \omega \left[ \frac{a^4}{2} - \frac{\varepsilon}{3} G^2 \omega^2 a^6 + \frac{1}{4} (3 \varepsilon^2 - \bar{\varepsilon}) G^4 \omega^4 a^8 \right]. \end{aligned}$$

Beachtet man noch die Stoffzahlen (53) und die Beziehungen (7), so folgt in der Tat die nach dem dritten Glied abgebrochene exakte Lösung (27) für den Kreisquerschnitt

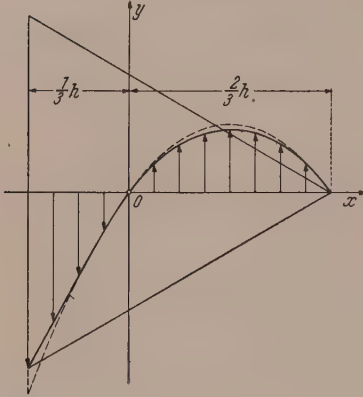
$$\begin{aligned} \tau_x &= -G \omega y \left[ 1 + \frac{2}{3} \gamma_2 \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{4}{9} \gamma_4 \omega^4 (x^2 + y^2)^2 \right], \\ \tau_y &= G \omega x \left[ 1 + \frac{2}{3} \gamma_2 \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{4}{9} \gamma_4 \omega^4 (x^2 + y^2)^2 \right] \end{aligned}$$

samt dem Torsionsmoment (29)

$$M = \pi G \omega \left[ \frac{a^4}{2} + \frac{2}{9} \gamma_2 \omega^2 a^6 + \frac{1}{9} \gamma_4 \omega^4 a^8 \right].$$

### V. Der dreieckförmige Querschnitt

Als weitere Anwendung der Methode der Störungsrechnung behandeln wir den in Abb. 3 dargestellten, gleichseitigen dreieckförmigen Querschnitt. Dabei nehmen wir den Sonderfall (31) an und beschränken uns bei der Durchrechnung auf die zwei ersten Näherungsfunktionen.



Wie beim elliptischen Querschnitt gehen wir auch hier von der bekannten strengen Lösung nullter Ordnung aus. Die Spannungsfunktion  $\Phi^{(0)}$ , die der Differentialgleichung (35) genügt, lautet<sup>6</sup>:

$$\Phi^{(0)} = c \left[ x^3 - 3 x y^2 - h (x^2 + y^2) + \frac{4}{27} h^3 \right], \quad (60)$$

wenn man zur Abkürzung

$$c = \frac{G \omega}{2 h}$$

Abb. 3. Schubspannungen im gleichseitigen Dreieck

schreibt. Hierin bezeichnet  $h$  die Dreieckshöhe. Die Spannungen nullter Ordnung haben folgende Werte:

$$\tau_x^{(0)} = -2 c y (3 x + h), \quad \tau_y^{(0)} = -c (3 x^2 - 3 y^2 - 2 h x). \quad (61)$$

Das Torsionsmoment nullter Ordnung beträgt nach (26)

$$M^{(0)} = \frac{1}{15 \sqrt{3}} G \omega h^4. \quad (62)$$

Die Näherungsfunktion erster Ordnung soll nun nach (36) die Gleichung

$$\Delta \Phi^{(1)} = -4 c^3 [27 (x^2 + y^2) (x^3 - 3 x y^2) - 54 h (x^2 + y^2)^2 + 36 h^2 (x^3 - 3 x y^2) - 8 h^3 (x^2 + y^2)] \quad (63)$$

mit der Randbedingung

$$\Phi^{(1)} = 0 \quad (\text{am Rand})$$

befriedigen. Durch Einsetzen bestätigt man leicht, daß die Differentialgleichung (63) die Lösung

$$\Phi^{(1)} = -\frac{3}{10} c^3 \left[ x^3 - 3 x y^2 - h (x^2 + y^2) + \frac{4}{27} h^3 \right] \cdot \left[ 9 (x^2 + y^2)^2 - 22 h (x^3 - 3 x y^2) + 8 h^2 (x^2 + y^2) + \frac{32}{27} h^4 \right] \quad (64)$$

besitzt. Gemäß (38) ergeben sich die Verbesserungsglieder erster Ordnung der Spannungen in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \tau_x^{(1)} &= \frac{3}{5} c^3 y \left[ 9 x (x^4 + 10 x^2 y^2 + 9 y^4) - 3 h (35 x^4 - 150 x^2 y^2 - 9 y^4) + \right. \\ &\quad \left. + 60 h^2 x (x^2 + 3 y^2) + \frac{40}{3} h^3 (x^2 + y^2) - \frac{56}{9} h^4 x \right], \\ \tau_y^{(1)} &= \frac{3}{10} c^3 \left[ 9 (7 x^6 - 5 x^4 y^2 - 15 x^2 y^4 - 3 y^6) - 6 h x (31 x^4 - 70 x^2 y^2 + 75 y^4) + \right. \\ &\quad \left. + 30 h^2 (5 x^4 - 6 x^2 y^2 - 3 y^4) - \frac{80}{3} h^3 x (x^2 + y^2) - \frac{56}{9} h^4 (x^2 - y^2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

<sup>6</sup> Vgl. S. Timoshenko, a. a. O., S. 236.



Die durch die Spannungen (65) bedingte Verbesserung des Torsionsmomentes berechnet sich zu

$$M^{(1)} = 4 \int_{x=-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} \int_{y=0}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{2}{3}h\right)} \Phi^{(1)}(x, y) dx dy = -\frac{4}{525\sqrt{3}} G^3 \omega^3 h^6. \quad (66)$$

Als Beispiel wählen wir wieder Stahl von Ziffer 3. Es sei:  $h = 12 \text{ cm}$ ,  $\omega = 0.306 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ . In Abb. 3 ist die Verteilung der Schubspannung  $\tau_y$  über der  $x$ -Achse maßstäblich aufgetragen. Die Spannungswerte  $\tau_y^{(0)}$  der linearen Theorie sind gestrichelt eingetragen. Die größte Schubspannung tritt in der Seitenmitte auf und hat nach (61) und (65) die Größe  $\tau_{\max} = -1389 \text{ kg/cm}^2$ . Die lineare Theorie ergibt an dieser Stelle gemäß (61) den Wert  $\tau_{\max}^{(0)} = -1600 \text{ kg/cm}^2$ . Nach (62) und (66) errechnen wir für das Torsionsmoment  $M = 1986 \text{ mkg}$  und entsprechend  $M^{(0)} = 2128 \text{ mkg}$ . Die maximale Schubspannung verringert sich demnach gegenüber dem Wert, den sie bei gleichem Verdrehungswinkel bei linearem Elastizitätsgesetz annehmen würde, um 13.2% und das Torsionsmoment ebenso um 6.7%.

## VI. Der quadratische Querschnitt

Zum Schluß betrachten wir kurz den quadratischen Querschnitt von der Seitenlänge  $2a$ . Wir wollen hier nur die Frage nach der Größe der auftretenden größten Spannung beantworten. Wie in vorigen Abschnitten, beschränken wir uns dabei auf den wichtigen Sonderfall (31) und wenden als Näherungsverfahren zur Lösung der Randwertaufgabe (32) mit (25) die Fehlerquadratmethode an.

Wir machen hier für die gesuchte Lösung  $\Phi$  den nur eingliedigen Näherungsansatz

$$\Phi = c(x^2 - a^2)(y^2 - a^2), \quad (67)$$

so daß der Ansatz für beliebige Werte des Parameters  $c$  bereits der Randbedingung (25) genügt. Wir setzen die Näherungslösung (67) in die Differentialgleichung (32) ein und erhalten somit die Fehlerfunktion  $f(x, y; c)$  in der Form

$$f(x, y; c) = 2G\omega + 2c(x^2 + y^2 - 2a^2) + 8\epsilon c^3[3x^6y^2 + 10x^4y^4 + 3x^2y^6 - 20a^2x^2y^2(x^2 + y^2) + a^4(x^4 + 30x^2y^2 + y^4) - 4a^6(x^2 + y^2)]. \quad (68)$$

Nun verlangen wir, daß das mittlere Fehlerquadrat im ganzen Bereich möglichst klein wird. Die notwendige Bedingung für einen Kleinstwert ist

$$\iint f(x, y; c) \frac{\partial f(x, y; c)}{\partial c} dx dy = 0. \quad (69)$$

Die Integration von (69) über die Quadratfläche führt auf die Bestimmungsgleichung für den Parameter  $c$

$$\frac{22}{15} c a^2 - G\omega + \frac{32}{35} \epsilon c^2 a^6 (16c a^2 - 9G\omega) + \frac{78565376}{1576575} \epsilon^2 c^5 a^{14} = 0. \quad (70)$$

Die aus dem Ansatz (67) herzuleitenden Schubspannungen  $\tau_x$  und  $\tau_y$  ergeben sich nach (21) zu

$$\tau_x = 2c y (x^2 - a^2), \quad \tau_y = -2c x (y^2 - a^2). \quad (71)$$

Die in den Seitenmitten auftretende größte Schubspannung beträgt dann

$$\tau_{\max} = 2c a^3. \quad (72)$$

Zum Vergleich führen wir die Näherungsrechnung mit dem Ansatz (67) auch für die lineare Theorie durch. Mit  $\varepsilon = 0$  bestimmen wir aus (70) den Wert

$$c^* = \frac{15}{22} \frac{G \omega}{a^2}$$

und somit die größte Schubspannung  $\tau_{\max}^*$  der linearen Theorie

$$\tau_{\max}^* = 1.364 G \omega a. \quad (73)$$

Dieser Näherungswert liegt nur 1.04% über dem mit Hilfe der Reihenentwicklungen zu berechnenden Wert der strengen Theorie<sup>7</sup>

$$\tau_{\max}^{**} = 1.350 G \omega a.$$

Die Änderung der maximalen Schubspannung infolge der nichtlinearen Zusatzglieder in (32) ist dann

$$\Delta \tau_{\max} = \tau_{\max} - \tau_{\max}^*. \quad (74)$$

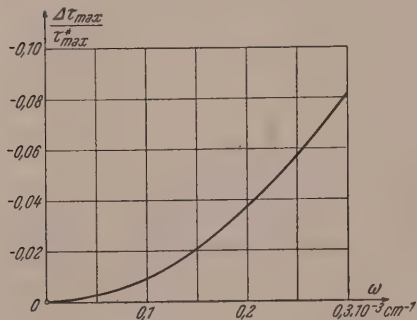


Abb. 4. Abnahme der größten Schubspannung für quadratischen Querschnitt

Als Zahlenbeispiel wählen wir noch einmal Flußstahl von Ziffer 3 und nehmen  $a = 5$  cm an. Um den Einfluß der Nichtlinearität für diesen Fall besser zu übersehen, sind in Abb. 4 die Änderungen  $\Delta \tau_{\max}$  im Verhältnis zum Wert  $\tau_{\max}^*$  der linearen Theorie in Abhängigkeit von der spezifischen Verdrehung  $\omega$  dargestellt.

<sup>7</sup> Vgl. S. Timoshenko, a. a. O., S. 248.

(Eingegangen am 19. Februar 1957)

## Zur rollenden Reibung zwischen Scheiben mit verschiedenen Elastizitätskonstanten

Von K. Desoyer, Wien

Mit 6 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Das Problem der rollenden Reibung zwischen zylindrischen Körpern mit verschiedenen Elastizitätskonstanten führt unter den Voraussetzungen, daß der Rollvorgang stationär und elastisch verläuft und im Gleitgebiet das Coulombsche Reibungsgesetz für jedes Flächenelement gilt, auf singuläre Integralgleichungen zweiter Art für die gesuchte Normaldruck- und Schubverteilung im Berührgebiet. Diese lassen sich für die Grenzfälle des vollkommenen Gleitens und des vollkommenen Haftens geschlossen lösen. Die für gleiche Elastizitätskonstanten bzw. bei verschiedenen Elastizitätskonstanten nur für den reibungsfreien Fall gültige Hertzsche Normaldruckverteilung tritt hier nicht mehr auf, da der Normaldruck durch die Schubspannung beeinflusst wird. Das Gleichungssystem für den allgemeinen Fall läßt sich auf eine einzelne singuläre Integralgleichung für eine Hilfsfunktion und Integraldarstellungen für die gesuchte Normaldruck- und Schubverteilung im Berührgebiet zurückführen.

Das Problem der rollenden Reibung zwischen deformierbaren kreiszylindrischen Körpern ist unter den Voraussetzungen, daß der Rollvorgang elastisch verläuft und in dem Teil des Berührgebietes, in dem Gleiten auftritt, das Coulombsche Reibungsgesetz für jedes Flächenelement gilt, für gleiche Elastizitätskonstanten der beiden Körper gelöst<sup>1</sup>. In diesem Fall gliedert sich das Berührgebiet in ein Haftgebiet an der Anlaufseite und ein anschließendes Gleitgebiet. Im ganzen Berührgebiet gilt die Hertzsche Normaldruckverteilung. Die Größe des Berührgebietes ist durch die Materialkonstanten, die Walzenradien und die Größe der übertragenen Normalkraft be-

<sup>1</sup> G. Heinrich: Zu L. Föppls Theorie der rollenden Reibung, Österr. Ingenieur-Archiv IV (1950) S. 365—375. Vorangegangene und spätere Arbeiten siehe Literaturverzeichnis im Anhang.

stimmt, die Unterteilung des Berührgebietes in Haft- und Gleitgebiet durch das Verhältnis von übertragener Tangential- zu Normalkraft.

Im folgenden sollen die Ausgangsgleichungen des Problems, die „Hertzsche Berührbedingung“ und die „Haftbedingung“, auf den Fall verschiedener Elastizitätskonstanten der beiden Körper verallgemeinert werden. Für Spezialfälle lassen sich geschlossene Lösungen dieser Gleichungen angeben. Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Lösung im allgemeinen Fall kann aufgezeigt werden.

### I. Die Berührbedingung

Es seien zwei deformierbare Körper von ursprünglich kreiszylindrischer Gestalt betrachtet, die mit parallelen Achsen gegeneinander gedrückt und gedreht werden, so daß zwischen ihnen eine Normalkraft  $N$  und eine Tangentialkraft  $T$  übertragen wird. Der Vorgang verlaufe stationär und elastisch. Die Deformationen in dem gesamten Gebiet, in dem eine Kraftübertragung zwischen den beiden Körpern stattfindet (Berührgebiet), müssen von solcher Art sein, daß eine Berührung längs einer gemeinsamen Fläche möglich ist. Das hieraus folgende Kriterium werde Berührbedingung genannt.

Wenn man voraussetzt, daß die Ausdehnung des Berührgebietes in tangentialer Richtung sehr klein gegen beide Walzenradien ist, kann man, um die von der Normaldruck- und Schubspannungsverteilung im Berührgebiet verursachten Deformationen zu erhalten, jeden der beiden Körper durch eine elastische Halbebene ersetzen, die längs eines Stückes ihres Randes belastet ist.

Herrscht längs des Randes einer elastischen Halbebene im Bereich  $-A \leq x \leq A$  eine Normaldruckverteilung  $p(x)$  und bezeichnet man mit  $\eta^{(p)}(x)$  die dadurch verursachte Verschiebung des Randes in Richtung der in das Innere der Halbebene weisenden  $y$ -Achse, so gilt<sup>2, 3</sup>

$$\frac{\partial \eta^{(p)}}{\partial x} = -\frac{2}{\pi E'} \int_{-A}^A \text{(c)} \frac{p(u) du}{x-u}. \quad (1)$$

Für eine in Richtung der positiven  $x$ -Achse positiv gezählte, im Bereich  $-A \leq x \leq A$  verteilte Schubbelastung  $q(x)$  ist<sup>4</sup>

$$\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial x} = -\frac{q(x)}{E'} \left(1 - \frac{1}{m}\right). \quad (2)$$

Für den ebenen Spannungszustand ist in Gl. (1) und (2)  $E' = E$ , für den ebenen Formänderungszustand  $E' = E \frac{m^2}{m^2 - 1}$  zu setzen, wobei  $E$  den Elastizitätsmodul und  $m$  die Poissonsche Zahl bedeuten.

Bei Beschränkung auf eine Theorie erster Ordnung können die beiden Anteile der Verschiebung überlagert werden

$$\eta = \eta^{(p)} + \eta^{(q)}. \quad (3)$$

Der Übersicht halber sei die Herleitung der durch die Verschiebungen ausgedrückten Berührbedingung<sup>5</sup> hier nochmals kurz angegeben. Abb. 1 zeigt die beiden Walzen oder Scheiben (Radien  $r_1$  bzw.  $r_2$ ) vor der Deformation. Mit  $x_0$  sei der unbekannte

<sup>2</sup> L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. III, S. 62, München 1947.

<sup>3</sup> (c) soll darauf aufmerksam machen, daß das Integral für Stellen  $x$  im Bereich  $-A < x < A$  wegen der singulären Stelle  $u = x$  im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen ist.

c ohne Klammer nach dem Integralzeichen bedeutet den Cauchyschen Hauptwert. Die Abweichung von der üblichen Bezeichnungsweise ist satztechnisch bedingt.

<sup>4</sup> G. Heinrich, l. c. Gl. (13).

<sup>5</sup> G. Heinrich, l. c. Gl. (16).



Abstand der Mitte des sich bei der Deformation ausbildenden Berührgebietes von der Verbindungslinie der Mittelpunkte  $M_1 M_2$  bezeichnet. Die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  sollen sich nach erfolgter Deformation der Körper berühren. Sie erfahren dabei die elastischen Verschiebungen  $\eta_1$  bzw.  $\eta_2$  (jede nach dem Inneren des zugehörigen Körpers positiv gezählt). Bezeichnet man mit  $A$  die elastische Annäherung der Kreismittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$ , dann gilt

$$A = \overline{A_1 A_2} + \eta_1 + \eta_2. \quad (4)$$

Weiters ist in erster Näherung

$$\overline{A_1 A_2} = \frac{1}{2} (x_0 + x)^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (5)$$

Aus Gl. (4) und (5) folgt

$$\frac{\partial A}{\partial x} = (x_0 + x) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\eta_1 + \eta_2) = 0 \quad (6)$$

für alle  $x$  im Berührungsgebiet  $-A \leq x \leq A$ .

Es sei nun  $p(x)$  der auf den Körper 1 im Berührgebiet wirkende Normaldruck,  $q(x)$  die auf den Körper 1 im Berührgebiet wirkende, in Richtung der gemeinsamen  $x$ -Achse positiv gezählte Schubspannung. Dann ist nach Gl. (1)

$$\frac{\partial \eta_1^{(p)}}{\partial x} = -\frac{2}{\pi E_1'} \int_{-A}^A \frac{p(u) du}{x-u}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \eta_2^{(p)}}{\partial x} = -\frac{2}{\pi E_2'} \int_{-A}^A \frac{p(u) du}{x-u} \quad (8)$$

Abb. 1. Zur Ableitung der Berührbedingung

$$\frac{\partial \eta_1^{(q)}}{\partial x} = -\frac{q(x)}{E_1'} \left( 1 - \frac{1}{m_1} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \eta_2^{(q)}}{\partial x} = \frac{q(x)}{E_2'} \left( 1 - \frac{1}{m_2} \right). \quad (10)$$

Setzt man Gl. (7) bis (10) unter Beachtung von Gl. (3) in (6) ein, dann erhält die „Berührbedingung“ die Form

$$C q(x) + \int_{-A}^A \frac{p(u) du}{x-u} = B \cdot (x_0 + x) \quad (11)$$

mit den Abkürzungen

$$B = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{E_1' E_2'}{E_1' + E_2'} \quad \text{und} \quad C = \frac{\pi}{2} \frac{\left( 1 - \frac{1}{m_1} \right) E_2' - \left( 1 - \frac{1}{m_2} \right) E_1'}{E_1' + E_2'}. \quad (12)$$

Gl. (11) muß für alle  $x$  im Berührungsgebiet  $-A \leq x \leq A$  erfüllt sein. Sie zeigt, daß im Falle verschiedener Elastizitätskonstanten der beiden Körper die Normaldruckverteilung durch die Schubspannungsverteilung beeinflusst wird, so daß die im Falle gleicher Elastizitätskonstanten ( $C = 0$ ) herrschende Hertzsche Normaldruckverteilung hier nicht mehr auftritt.

## II. Die Haftbedingung

In dem Teil des Berührgebietes, in dem Haften eintritt, müssen die Deformationen von solcher Art sein, daß zwei einander in diesem Gebiet berührende Punkte beider Körper dieselbe Geschwindigkeit haben. Dies führt zu einem weiteren Kriterium, das

„Haftbedingung“ genannt werde. Zu deren Ableitung diene die Abb. 2. Es seien  $P_1$  und  $P_2$  zwei Punkte, die im Haftgebiet zusammenfallen. Ihre Geschwindigkeiten  $w_1$  und  $w_2$  sind daher gleich. Ohne Deformation würde  $P_1$  in  $P_1^0$ ,  $P_2$  in  $P_2^0$  liegen. Die elastischen Verschiebungen zufolge der Deformation seien  $\xi_1$  bzw.  $\xi_2$ . (Wenn der Körper 1 der treibende ist, ist  $\xi_1$  negativ.)  $s_1$  und  $s_2$  seien die zeitlich veränderlichen Kreisbögen  $D_1 P_1^0$  und  $D_2 P_2^0$ .  $M_1 D_1$  und  $M_2 D_2$  seien raumfeste Richtungen, die Punkte  $D_1$  und  $D_2$  praktisch spannungsfrei.  $\omega_1$  und  $\omega_2$  seien die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Körper. Es gilt dann<sup>6</sup>

$$w_1 = \frac{d}{dt} (s_1 + \xi_1), \quad w_2 = \frac{d}{dt} (s_2 + \xi_2), \quad w_1 = w_2, \quad \frac{ds_1}{dt} = r_1 \omega_1, \quad \frac{ds_2}{dt} = r_2 \omega_2,$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{d\xi_1}{ds_1} \frac{ds_1}{dt} = \frac{d\xi_1}{ds_1} r_1 \omega_1, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{d\xi_2}{ds_2} r_2 \omega_2.$$

Ersetzt man  $\frac{d\xi_1}{ds_1}$  und  $\frac{d\xi_2}{ds_2}$  durch die Dehnungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , so erhält man schließlich die Bedingung

$$r_1 \omega_1 (1 + \varepsilon_1) = r_2 \omega_2 (1 + \varepsilon_2). \quad (13)$$

Nun sei  $\omega_{20}$  die Winkelgeschwindigkeit, die die Scheibe 2 hätte, wenn sie ohne Deformation und ohne Schlupf auf der Scheibe 1 abrollen würde:

$$r_2 \omega_{20} = r_1 \omega_1. \quad (14)$$

Setzt man

$$\omega_2 = \omega_{20} - \Delta\omega, \quad (15)$$

so erhält man durch Einsetzen von Gl. (14) und (15) in (13) unter Vernachlässigung des Produktes  $\varepsilon_2 \Delta\omega$

$$\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x) = \frac{r_2}{r_1 \omega_1} \Delta\omega. \quad (16)$$

Es muß also die Differenz der Dehnungen in tangentialer Richtung im Haftgebiet konstant sein.

Nun werde wie üblich der Schlupf  $S$ , bezogen auf eine Umdrehung der Scheibe 1, eingeführt:

$$S = (r_1 \omega_1 - r_2 \omega_2) \frac{2\pi}{\omega_1}. \quad (17)$$

Wegen Gl. (14) und (15) kann man dafür auch schreiben

$$S = 2\pi r_2 \frac{\Delta\omega}{\omega_1}. \quad (18)$$

Damit geht die Bedingung (16) über in

$$\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x) = \frac{S}{2\pi r_1} = \text{konst.} \quad (19)$$

für alle  $x$  im Haftgebiet.

Um die Dehnungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  durch die Normaldruck- und Schubverteilung im Berührgebiet auszudrücken, betrachten wir wieder eine Halbebene, auf deren Rand im Gebiet  $-A \leq x \leq A$  eine Normaldruckverteilung  $p(x)$  und eine in Richtung der positiven  $x$ -Achse positiv gezählte Schubbelastung  $q(x)$  wirkt. Die  $y$ -Achse zeige ins Innere der Halbebene. Die von  $p(x)$  herrührenden Spannungen längs des Randes sind<sup>7</sup>

$$(\sigma_x^{(p)})_{y=0} = (\sigma_y^{(p)})_{y=0} = -p(x). \quad (20)$$

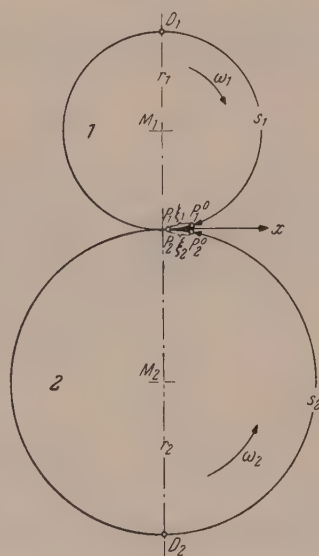


Abb. 2. Zur Ableitung der Haftbedingung

<sup>6</sup> G. Heinrich, l. c. S. 372.

<sup>7</sup> L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. III, S. 52, München 1947.

Eine im Koordinatenursprung angreifende, in Richtung der positiven  $x$ -Achse wirkende Schubkraft  $Q$  (bezogen auf die Längeneinheit in der  $z$ -Richtung) erzeugt in der Halbebene den Spannungszustand<sup>8</sup>

$$\sigma_x = -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2Q}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Wegen

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'} \left( \sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y \right)$$

erhält man für den Rand  $y = 0$

$$(\varepsilon_x)_{y=0} = -\frac{2Q}{\pi E'} \frac{1}{x}.$$

Für eine an der Stelle  $x_1$  des Randes angreifende Schubkraft  $Q$  ist daher

$$(\varepsilon_x)_{y=0} = -\frac{2Q}{\pi E'} \frac{1}{x - x_1}.$$

Daraus erhält man für eine in  $-A \leq x \leq A$  des Randes verteilte Schubbelastung  $q(x)$  die Randdehnung

$$(\varepsilon_x^{(q)})_{y=0} = -\frac{2}{\pi E'} \int_{-A}^A \int_C \frac{q(u) du}{x - u}. \quad (21)$$

Überlagerung der von  $p$  und  $q$  herrührenden Dehnungen gibt

$$(\varepsilon_x)_{y=0} = -\frac{1}{E'} \left[ \left( 1 - \frac{1}{m} \right) p(x) + \frac{2}{\pi} \int_{-A}^A \int_C \frac{q(u) du}{x - u} \right]. \quad (22)$$

Ist wie vorne  $p(x)$  der auf den Körper 1 im Berührgebiet wirkende Normaldruck,  $q(x)$  die auf den Körper 1 im Berührgebiet wirkende, in Richtung der gemeinsamen  $x$ -Achse positiv gezählte Schubbelastung, so ist daher

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= -\frac{1}{E_1'} \left[ \left( 1 - \frac{1}{m_1} \right) p(x) + \frac{2}{\pi} \int_{-A}^A \int_C \frac{q(u) du}{x - u} \right], \\ \varepsilon_2(x) &= -\frac{1}{E_2'} \left[ \left( 1 - \frac{1}{m_2} \right) p(x) - \frac{2}{\pi} \int_{-A}^A \int_C \frac{q(u) du}{x - u} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Einsetzen von Gl. (23) in (19) liefert die „Haftbedingung“ in der Form

$$C p(x) + \int_{-A}^A \int_C \frac{q(u) du}{x - u} = S^* = \text{konst.}, \quad (24)$$

wobei  $C$  die Bedeutung Gl. (12) hat und  $S^*$  proportional dem Schlupf  $S$  ist gemäß

$$S^* = S \frac{1}{4r_1 \left( \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \right)}. \quad (25)$$

Damit sind die Ausgangsgleichungen des vorliegenden Problems formuliert: die Berührbedingung (11) muß für das ganze Berührgebiet  $-A \leq x \leq A$  erfüllt werden. Im Haftgebiet muß die Haftbedingung (24) erfüllt sein. In dem Teil oder den Teilen

<sup>8</sup> L. Föppl, l. c. S. 29.



des Berührgebietes, wo relatives Gleiten zwischen den beiden Körpern auftritt, soll laut Voraussetzung

$$q(x) = \mu_0 p(x) \quad (26)$$

bzw.

$$q(x) = -\mu_0 p(x) \quad (27)$$

je nach der Richtung des relativen Gleitens, gelten.  $\mu_0$  sei der Gleitreibungskoeffizient.

### III. Bereitstellung einiger Formeln

Im folgenden wird die Lösung von singulären Integralgleichungen des Typs

$$F(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(u)}{x-u} du = G(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (28)$$

benötigt. Wir entnehmen einer Arbeit von H. Söhngen<sup>9</sup>: Ist  $G(x)$  in  $(-1, 1)$  eine Funktion der Klasse  $L^p$  ( $p > 1$ ) und werden solche Lösungen von Gl. (28) gesucht, die in  $(-1, 1)$  einer Klasse  $L^q$  ( $q > 1$ ) angehören, so gilt (für reellen Parameter  $\lambda$ , nur dieser Fall wird hier benötigt): die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$F_0(x) = -C_0 \frac{\sin \pi \alpha}{\pi(1-x)} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^\alpha, \quad (29)$$

wobei die Konstante

$$C_0 = \int_{-1}^1 F_0(x) dx \quad (29')$$

beliebig vorgegeben werden kann und

$$\operatorname{tg} \pi \alpha = -\lambda, \quad -1 < \alpha \leq 0 \quad (30)$$

zu wählen ist.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$F(x) = \frac{G(x)}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-u}{1-x} \left( \frac{1-u}{1+u} \frac{1+x}{1-x} \right)^\alpha \frac{G(u)}{x-u} du - \\ - C_1 \frac{\sin \pi \alpha}{\pi(1-x)} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^\alpha, \quad (31)$$

wobei die Konstante

$$C_1 = \int_{-1}^1 F(x) dx \quad (31')$$

beliebig vorgegeben werden kann.

Die Gl. (28) bis (31') sollen nun auf die Grenzen  $a$  und  $b$  gebracht werden, da dies im letzten Abschnitt benötigt wird. Führt man die Substitution

$$x = \frac{2}{b-a} \bar{x} - \frac{b+a}{b-a}, \quad u = \frac{2}{b-a} \bar{u} - \frac{b+a}{b-a}$$

<sup>9</sup> H. Söhngen: Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation, Math. Zs. Bd. 60 (1934), S. 31—51.

Gleichungen des allgemeineren Typs

$$a(x) F(x) + \lambda \int_{-1}^1 \frac{F(u) du}{x-u} = G(x)$$

hat erstmalig T. Carleman behandelt: Sur la résolution de certaines équations intégrales, Arkiv för Mat. Astr. o. Fysik Nr. 26 (1922), S. 13. Vgl. auch F. Tricomi, Lezioni sulle Equazioni Integrali, Torino 1954, S. 281—297.

in obige Gleichungen ein, nennt  $F(x) = f(\bar{x})$ ,  $G(x) = g(\bar{x})$  und läßt die Querstriche wieder weg, so erhält man: Unter obigen Voraussetzungen hat die allgemeine Lösung der Integralgleichung

$$f(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_a^b \frac{f(u)}{x-u} du = g(x), \quad a \leq x \leq b \quad (32)$$

die Form

$$f(x) = \frac{g(x)}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \frac{1}{\pi} \frac{1}{b-x} \left( \frac{b-x}{x-a} \right)^{-\alpha} \int_a^b \left( \frac{b-u}{u-a} \right)^{\alpha} \frac{(b-u)g(u)}{x-u} du - C_2 \frac{\sin \pi \alpha}{\pi(b-x)} \left( \frac{b-x}{x-a} \right)^{-\alpha} \quad (33)$$

mit

$$\operatorname{tg} \pi \alpha = -\lambda, \quad -1 < \alpha \leq 0. \quad (34)$$

Die Konstante

$$C_2 = \int_a^b f(x) dx \quad (35)$$

ist beliebig wählbar.

Die im folgenden auftretenden Störfunktionen  $g(x)$  sind Konstante oder lineare Funktionen von  $x$ . In Hinblick auf eine beabsichtigte Fortsetzung des Abschnittes VI soll hier bereits das Integral

$$J \equiv \int_a^b \left( \frac{b-u}{u-a} \right)^{\alpha} \frac{c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3}{x-u} du, \quad -1 < \alpha < 0, \quad (36)$$

berechnet werden, das für Gl. (33) benötigt wird, wenn  $g(u)$  ein Polynom 2. Grades ist. Durch die Substitution

$$\frac{b-u}{u-a} = z \quad (37)$$

erhält Gl. (36) die Form

$$J \equiv \frac{b-a}{x-a} \int_0^{\infty} z^{\alpha} \left[ \frac{c_0(1+z)^3 + c_1(1+z)^2(b+az) + c_2(1+z)(b+az)^2 + c_3(b+az)^3}{(z+1)^4 \left( z - \frac{b-x}{x-a} \right)} \right] dz.$$

Durch Partialbruchzerlegung des Ausdruckes in der Klammer wird

$$J \equiv D_0 \int_0^{\infty} \frac{z^{\alpha} dz}{z - \frac{b-x}{x-a}} - \sum_{n=1}^4 D_n \int_0^{\infty} \frac{z^{\alpha} dz}{(z+1)^n} \quad (38)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= D_1 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3, \\ D_2 &= (b-a)[c_1 + c_2(x+a) + c_3(x^2 + ax + a^2)], \\ D_3 &= (b-a)^2[c_2 + c_3(x+2a)], \\ D_4 &= (b-a)^3 c_3. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Die in Gl. (38) auftretenden Integrale sind bekannt<sup>10</sup>. Es ist

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{\alpha}}{z-k} dz = -k^{\alpha} \pi \operatorname{ctg} \pi \alpha \quad (k > 0, -1 < \alpha < 0), \quad (40)$$

<sup>10</sup> W. Gröbner, N. Hofreiter: Integraltafel II, 421, 13c, 13e, 20, Wien: Springer-Verlag. (1950).

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{\alpha}}{z+k} dz = -k^{\alpha} \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \quad (k > 0, -1 < \alpha < 0), \quad (41)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{\alpha}}{(z+1)^n} dz = -\binom{n-\alpha-2}{n-1} \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \quad \begin{matrix} (0 < 1+\alpha < n, n=1, 2, 3, \dots, \\ 1+\alpha \neq 1, 2, \dots, n-1). \end{matrix} \quad (42)$$

Damit ergibt sich für  $\frac{b-x}{x-a} > 0, (-1 < \alpha < 0)$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \frac{b-u}{u-a} \right)^{\alpha} \frac{c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3}{x-u} du &= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) \left[ \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} - \right. \\ &- \left( \frac{b-x}{x-a} \right)^{\alpha} \pi \operatorname{ctg} \pi \alpha \Big] - \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \left\{ (b-a) \alpha [c_1 + c_2 (x+a) + c_3 (x^2 + ax + a^2)] + \right. \\ &+ (b-a)^2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} [c_2 + c_3 (x+2a)] + (b-a)^3 \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{6} c_3 \Big\} \end{aligned} \quad (43)$$

und für  $\frac{b-x}{a-x} > 0, (-1 < \alpha < 0)$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \frac{b-u}{u-a} \right)^{\alpha} \frac{c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3}{x-u} du &= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \cdot \\ &\cdot \left[ 1 - \left( \frac{b-x}{a-x} \right)^{\alpha} \right] - \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \left\{ (b-a) \alpha [c_1 + c_2 (x+a) + c_3 (x^2 + ax + a^2)] + \right. \\ &+ (b-a)^2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} [c_2 + c_3 (x+2a)] + (b-a)^3 \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{6} c_3 \Big\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Anwendung von Gl. (33), (34), (35) und (43) gibt: Die allgemeine Lösung aus der Klasse  $L^q$  ( $q > 1$ ) in  $(a, b)$  der Integralgleichung

$$f(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_a^b \frac{f(u)}{x-u} du = d_0 + d_1 x + d_2 x^2, \quad a \leq x \leq b, \quad (45)$$

lautet:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\sin \pi \alpha}{\lambda (b-x)} \left( \frac{b-x}{x-a} \right)^{-\alpha} \left\{ (b-x) (d_0 + d_1 x + d_2 x^2) - \right. \\ &- (b-a) \alpha [(b d_1 - d_0) + (b d_2 - d_1) (x+a) - d_2 (x^2 + ax + a^2)] - \\ &- (b-a)^2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} [(b d_2 - d_1) - d_2 (x+2a)] + \\ &+ (b-a)^3 \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{6} d_2 \Big\} - C_3 \frac{\sin \pi \alpha}{\pi (b-x)} \left( \frac{b-x}{x-a} \right)^{-\alpha} \end{aligned} \quad (46)$$

mit

$$\operatorname{tg} \pi \alpha = -\lambda, \quad -1 < \alpha < 0. \quad (47)$$

Dabei ist

$$C_3 = \int_a^b f(x) dx \quad (48)$$

beliebig wählbar. Bei der Berechnung von Gl. (46) wurde die aus Gl. (47) folgende Identität

$$(\sin \pi \alpha)^2 \equiv \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \quad (49)$$

verwendet.



#### IV. Gleiten im ganzen Berührgebiet

Wenn im ganzen Berührgebiet der beiden betrachteten Walzen oder Scheiben relatives Gleiten eintritt und vorausgesetzt wird, daß der Körper 1 der treibende ist, dann geht die Berührbedingung Gl. (11) wegen Gl. (26) über in

$$C \mu_0 p(x) + \int_{-A}^A \frac{p(u) du}{x-u} = B \cdot (x_0 + x). \quad -A \leq x \leq A \quad (50)$$

Die Haftbedingung (24) gilt in diesem Fall nicht. Gl. (50) ist eine Integralgleichung vom Typ (45) mit

$$\lambda = \frac{\pi}{C \mu_0} \quad (51)$$

und

$$d_0 = \frac{B x_0}{C \mu_0}, \quad d_1 = \frac{B}{C \mu_0}, \quad d_2 = 0. \quad (52)$$

Setzt man  $-\alpha = \Theta$  und  $C_3 = N$ , so lautet ihre allgemeine Lösung gemäß Gl. (46), (47) und (48):

$$p(x) = B \frac{\sin \pi \Theta}{\pi} \frac{1}{A-x} \left( \frac{A-x}{x+A} \right)^\Theta \left[ (A-x)(x_0 + 2A\Theta + x) - 2A\Theta(x_0 + A\Theta) + \frac{N}{B} \right] \quad (53)$$

mit

$$\operatorname{tg} \pi \Theta = \frac{\pi}{C \mu_0}, \quad 0 < \Theta < 1 \quad (54)$$

und

$$N = \int_{-A}^A p(x) dx, \quad (55)$$

$N$  bedeutet die im Berührgebiet zwischen den beiden Körpern übertragene Normalkraft, bezogen auf die Längeneinheit in der Richtung der Walzenachsen. Die Randbedingungen  $p(A) = 0$  bzw.  $p(-A) = 0$  fordern

$$-2A\Theta(x_0 + A\Theta) + \frac{N}{B} = 0$$

bzw.

$$x_0 + 2A\Theta - A = 0.$$

Daraus folgt  $x_0 = A(1 - 2\Theta)$  (56)

und  $N = B A^2 2\Theta(1 - \Theta)$ . (57)

Aus Gl. (57) läßt sich die halbe Breite  $A$  des Berührgebietes durch  $N$  ausdrücken:

$$A = \sqrt{\frac{N}{2\Theta(1-\Theta)B}}. \quad (58)$$

Gl. (53) ergibt schließlich mit (54), (56) und (57)

$$p(x) = \frac{AB}{\sqrt{\pi^2 + C^2 \mu_0^2}} \left(1 - \frac{x}{A}\right)^\Theta \left(1 + \frac{x}{A}\right)^{1-\Theta} \equiv \frac{AB}{\sqrt{\pi^2 + C^2 \mu_0^2}} p^* \left(\frac{x}{A}\right). \quad (59)$$

Mit Gl. (59) ist laut Voraussetzung auch  $q(x)$  bestimmt:

$$q(x) = \mu_0 p(x). \quad (60)$$

Man überzeugt sich leicht durch direkte Integration von Gl. (59), daß Gl. (55) und (57) übereinstimmen. In Abb. 3 ist der dimensionslose Ausdruck  $p^*$  für verschiedene

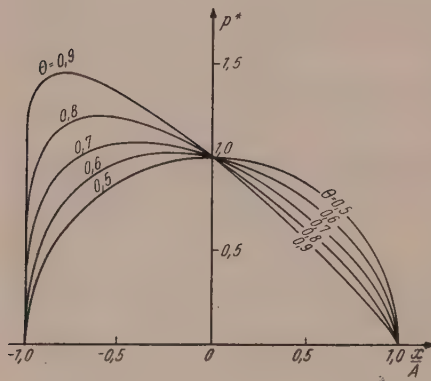


Abb. 3. Normaldruckverteilung im Falle des Gleitens

Werte von  $\Theta$  aufgetragen<sup>11</sup>. Für gleiche Elastizitätskonstanten ( $C = 0$ ,  $\Theta = 1/2$ ) ergibt sich, wie bekannt<sup>1</sup>, die Hertz'sche Druckverteilung

$$p(x) = \frac{E'}{4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) A \sqrt{1 - \left( \frac{x}{A} \right)^2} \quad \text{mit} \quad A = 2 \sqrt{\frac{2N}{\pi E' \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}}. \quad (61)$$

### V. Haften im ganzen Berührgebiet

Es soll nun untersucht werden, ob und unter welchen Bedingungen im ganzen Berührgebiet Haften eintreten kann. In diesem Fall sind Berührbedingung (11) und Haftbedingung (24) für  $-A \leq x \leq A$  zu erfüllen. Durch Addition und Subtraktion erhält man daraus zwei entkoppelte Integralgleichungen des Typs Gl. (45) für die zwei unbekannten Funktionen  $p(x) + q(x)$  und  $p(x) - q(x)$ :

$$p(x) + q(x) + \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{p(u) + q(u)}{x - u} du = d_{10} + d_{11} x, \quad (62)$$

$$p(x) - q(x) + \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-A}^A \frac{p(u) - q(u)}{x - u} du = d_{20} + d_{21} x \quad (63)$$

mit

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{\pi}{C} \quad (64)$$

und

$$d_{10} = \frac{S^* + B x_0}{C}, \quad d_{20} = \frac{S^* - B x_0}{C}, \quad d_{11} = -d_{21} = \frac{B}{C}. \quad (65)$$

Die Gl. (62) bzw. (63) haben gemäß Gl. (46), (47), (48) die allgemeinen Lösungen

$$p(x) + q(x) = -B \frac{\sin \pi \alpha_1}{\pi (A - x)} \left( \frac{A - x}{x + A} \right)^{-\alpha_1} \left[ (A - x) \left( \frac{S^*}{B} + x_0 - 2A \alpha_1 + x \right) + 2A \alpha_1 \left( \frac{S^*}{B} + x_0 - A \alpha_1 \right) + \frac{N + T}{B} \right] \quad (66)$$

bzw.

$$p(x) - q(x) = B \frac{\sin \pi \alpha_2}{\pi (A - x)} \left( \frac{A - x}{x + A} \right)^{-\alpha_2} \left[ (A - x) \left( \frac{S^*}{B} - x_0 + 2A \alpha_2 - x \right) + 2A \alpha_2 \left( \frac{S^*}{B} - x_0 + A \alpha_2 \right) - \frac{N - T}{B} \right] \quad (67)$$

mit

$$\operatorname{tg} \pi \alpha_1 = -\lambda_1 = -\frac{\pi}{C} \quad (-1 < \alpha_1 < 0), \quad \operatorname{tg} \pi \alpha_2 = -\lambda_2 = \frac{\pi}{C} \quad (-1 < \alpha_2 < 0). \quad (68)$$

$$N = \int_{-A}^A p(x) dx \quad \text{bzw.} \quad T = \int_{-A}^A q(x) dx \quad (69)$$

bedeuten hierin die auf die Längeneinheit in Richtung der Walzenachsen bezogene übertragene Normal- bzw. Tangentialkraft.

Wegen Gl. (68) ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -1.$$

Wir setzen

$$-\alpha_1 = \vartheta, \quad \operatorname{tg} \pi \vartheta = \frac{\pi}{C}, \quad 0 < \vartheta < 1. \quad (70)$$

<sup>11</sup> Dieselbe Figur ist auch für  $0 < \Theta < 1/2$  verwendbar, wenn man  $x$  durch  $-x$  und  $\Theta$  durch  $1 - \Theta$  ersetzt.

Aus Gl. (66) und (67) folgt dann:

$$\begin{aligned}
 p(x) = & \frac{B}{2} \frac{\sin \pi \vartheta}{\pi} \left\{ (A-x)^{\vartheta} (x+A)^{-\vartheta} \left( \frac{S^*}{B} + x_0 + 2A\vartheta + x \right) - \right. \\
 & - (A-x)^{\vartheta-1} (x+A)^{-\vartheta} \left[ 2A\vartheta \left( \frac{S^*}{B} + x_0 + A\vartheta \right) - \frac{N+T}{B} \right] - \\
 & - (A-x)^{1-\vartheta} (x+A)^{\vartheta-1} \left[ \frac{S^*}{B} - x_0 - 2A(1-\vartheta) - x \right] + \\
 & \left. + (A-x)^{-\vartheta} (x+A)^{\vartheta-1} \left[ 2A(1-\vartheta) \left( \frac{S^*}{B} - x_0 - A(1-\vartheta) \right) + \frac{N-T}{B} \right] \right\} \quad (71)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 q(x) = & \frac{B}{2} \frac{\sin \pi \vartheta}{\pi} \left\{ (A-x)^{\vartheta} (x+A)^{-\vartheta} \left( \frac{S^*}{B} + x_0 + 2A\vartheta + x \right) - \right. \\
 & - (A-x)^{\vartheta-1} (x+A)^{-\vartheta} \left[ 2A\vartheta \left( \frac{S^*}{B} + x_0 + A\vartheta \right) - \frac{N+T}{B} \right] + \\
 & + (A-x)^{1-\vartheta} (x+A)^{\vartheta-1} \left[ \frac{S^*}{B} - x_0 - 2A(1-\vartheta) - x \right] - \\
 & \left. - (A-x)^{-\vartheta} (x+A)^{\vartheta-1} \left[ 2A(1-\vartheta) \left( \frac{S^*}{B} - x_0 - A(1-\vartheta) \right) + \frac{N-T}{B} \right] \right\}. \quad (72)
 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen  $p(A) = 0$  und  $q(A) = 0$  fordern

$$2A\vartheta \left( \frac{S^*}{B} + x_0 + A\vartheta \right) - \frac{N+T}{B} = 0 \quad (73)$$

und

$$2A(1-\vartheta) \left[ \frac{S^*}{B} - x_0 - A(1-\vartheta) \right] + \frac{N-T}{B} = 0. \quad (74)$$

Die Randbedingungen  $p(-A) = 0$  und  $q(-A) = 0$  fordern weiters

$$\frac{S^*}{B} + x_0 + 2A\vartheta - A = 0 \quad (75)$$

und

$$\frac{S^*}{B} - x_0 - 2A(1-\vartheta) + A = 0. \quad (76)$$

Aus den Gl. (73) bis (76) lassen sich  $x_0$ ,  $S^*$ ,  $N$  und  $T$  durch  $A$  ausdrücken. Man erhält:

$$x_0 = 0, \quad (77)$$

$$S^* = AB(1-2\vartheta), \quad (78)$$

$$N = 2A^2B\vartheta(1-\vartheta), \quad (79)$$

$$T = 0. \quad (80)$$

Aus Gl. (79) läßt sich wieder die halbe Breite  $A$  des Berührgebietes durch  $N$  ausdrücken

$$A = \sqrt{\frac{N}{2\vartheta(1-\vartheta)B}}. \quad (81)$$

Gl. (78) gibt wegen Gl. (25) den Schlupf  $S$ , der in diesem Fall ein reiner Formänderungsschlupf ist, zu

$$S = 4r_1AB \left( \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \right) (1-2\vartheta) = \frac{2r_1(1-2\vartheta)}{\sqrt{\vartheta(1-\vartheta)}} \sqrt{N\pi \left( \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \right) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}. \quad (82)$$

Als Druckverteilung bzw. Schubverteilung erhält man unter Beachtung von Gl. (70):

$$\begin{aligned}
 p(x) = & \frac{AB}{2\sqrt{\pi^2 + C^2}} \left[ \left( 1 - \frac{x}{A} \right)^{\vartheta} \left( 1 + \frac{x}{A} \right)^{1-\vartheta} + \left( 1 - \frac{x}{A} \right)^{1-\vartheta} \left( 1 + \frac{x}{A} \right)^{\vartheta} \right] \equiv \\
 & \equiv \frac{AB}{\sqrt{\pi^2 + C^2}} p^{**} \left( \frac{x}{A} \right), \quad (83)
 \end{aligned}$$



$$q(x) = \frac{A B}{2 \sqrt{\pi^2 + C^2}} \left[ \left(1 - \frac{x}{A}\right)^{\vartheta} \left(1 + \frac{x}{A}\right)^{1-\vartheta} - \left(1 - \frac{x}{A}\right)^{1-\vartheta} \left(1 + \frac{x}{A}\right)^{\vartheta} \right] \equiv \frac{A B}{\sqrt{\pi^2 + C^2}} q^{**} \left( \frac{x}{A} \right). \quad (84)$$

Die dimensionslosen Funktionen  $p^{**}$  bzw.  $q^{**}$  sind in den Abb. 4 bzw. 5 für einige Werte von  $\vartheta$  aufgetragen<sup>12</sup>. Für gleiche Elastizitätskonstanten ( $C = 0$ ,  $\vartheta = 1/2$ ) er-

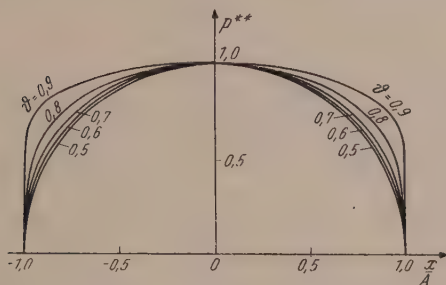


Abb. 4. Normaldruckverteilung im Falle des Haftens

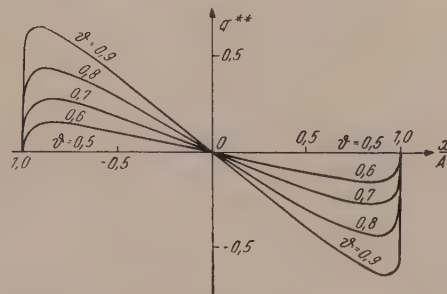


Abb. 5. Schubspannungsverteilung im Berührgebiet im Falle des Haftens

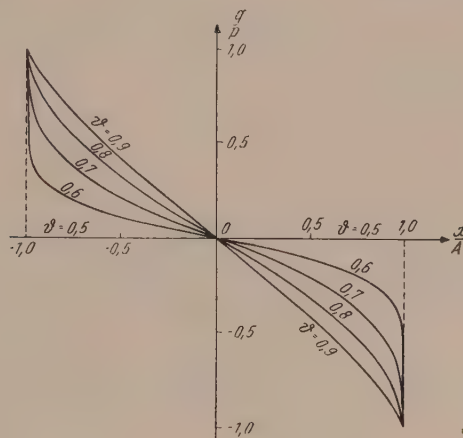


Abb. 6. Quotient aus Schubspannung und Normaldruck im Falle des Haftens

gibt sich wieder die Hertzsche Druckverteilung (61),  $q(x) \equiv 0$  und  $S^* = 0$ . In Abb. 6 ist das Verhältnis  $q(x)/p(x)$  für verschiedene Werte von  $\vartheta$  aufgetragen.

$$\text{Für } \vartheta \geq 1/2 \text{ ist } \lim_{x \rightarrow -A} \frac{q}{p} = \pm 1 \text{ und } \lim_{x \rightarrow A} \frac{q}{p} = \mp 1, \text{ für } \left| \frac{x}{A} \right| < 1 \text{ ist } \left| \frac{q}{p} \right| < 1. \quad (85)$$

Rollen mit Haften im ganzen Berührgebiet ist also wegen Gl. (80) nur ohne Übertragung einer resultierenden Tangentialkraft möglich und auch in diesem Fall für  $C \neq 0$  wegen Gl. (85) nur dann, wenn der Reibungskoeffizient  $\mu_0 \geq 1$  ist.

## VI. Vorbereitung der Lösung für den allgemeinen Fall der Übertragung einer Normal- und Tangentialkraft

Im Falle gleicher Elastizitätskonstanten tritt, wenn  $0 < |T| < \mu_0 N$  ist, eine Gliederung des Berührgebietes in ein vorderes Haftgebiet und ein anschließendes Gleitgebiet ein<sup>1</sup>. Setzt man voraus, daß eine solche „Zweigeietslösung“ auch im Falle

<sup>12</sup> Bemerkung <sup>11</sup> gilt sinngemäß auch für  $\vartheta$ .

ungleicher Elastizitätskonstanten existiert<sup>13</sup> und Scheibe 1 die treibende ist, so bilden Berührbedingung, Haftbedingung und Coulombsches Reibungsgesetz das folgende Gleichungssystem:

$$C q(x) + \int_{-A}^A \frac{p(u)}{x-u} du = B(x_0 + x) \quad \text{für } -A \leq x \leq A \quad (\text{ganzes Berührgebiet}), \quad (86)$$

$$C p(x) + \int_{-A}^A \frac{q(u)}{x-u} du = S^* = \text{konst.} \quad \text{für } a \leq x \leq A \quad (\text{Haftgebiet}), \quad (87)$$

$$q(x) = \mu_0 p(x) \quad \text{für } -A \leq x \leq a \quad (\text{Gleitgebiet}), \quad (88)$$

wobei die Unterteilungsstelle  $x = a$  unbekannt ist. Es ist möglich, die beiden Gl. (86) und (87) ähnlich wie im vorigen Abschnitt zu entkoppeln und gleichzeitig Gl. (88) zu erfüllen: Wir nehmen an, wir hätten die Lösung für  $p(x)$  und  $q(x)$  bereits und setzen sie in Gl. (87) ein, jedoch für eine Stelle im Gleitgebiet. Dann wird Gl. (87) nicht erfüllt sein, sondern es wird sich auf der rechten Seite ein Ausdruck  $S^* + h(x)$  ergeben. Um den Gültigkeitsbereich von Gl. (87) auf das ganze Berührgebiet zu erweitern, addieren wir also rechts eine unbekannte Hilfsfunktion  $h(x)$ , d. h. wir ersetzen Gl. (87) durch

$$C p(x) + \int_{-A}^A \frac{q(u)}{x-u} du = S^* + h(x) \quad \text{für } -A \leq x \leq A. \quad (87')$$

$h(x)$  soll die Bedingungen

$$h(x) \equiv 0 \quad \text{für } a \leq x \leq A \quad (89)$$

und

$$h(-A) = \text{endlich} \quad (90)$$

erfüllen. Durch Addition und Subtraktion von Gl. (86) und (87') erhält man die beiden nunmehr für  $-A \leq x \leq A$  geltenden Gleichungen vom Typ (32) bzw. (45)

$$p(x) + q(x) + \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{p(u) + q(u)}{x-u} du = d_{10} + d_{11}x + \frac{h(x)}{C}, \quad (91)$$

$$p(x) - q(x) + \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-A}^A \frac{p(u) - q(u)}{x-u} du = d_{20} + d_{21}x + \frac{h(x)}{C}, \quad (92)$$

wobei  $\lambda_1, \lambda_2, d_{10}$  bis  $d_{21}$  die Bedeutungen Gl. (64) und (65) haben. Nach Gl. (66), (67) und (33) ist, unter Beachtung von Gl. (89),

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= -B \frac{\sin \pi \alpha_1}{\pi (A-x)} \left( \frac{A-x}{x+A} \right)^{-\alpha_1} \\ &\cdot \left[ (A-x) \left( \frac{S^*}{B} + x_0 - 2A\alpha_1 + x \right) + 2A\alpha_1 \left( \frac{S^*}{B} + x_0 - A\alpha_1 \right) + \frac{N+T}{B} \right] + \\ &+ \frac{C}{C^2 + \pi^2} h(x) - \frac{1}{C^2 + \pi^2} \frac{1}{A-x} \left( \frac{A-x}{x+A} \right)^{-\alpha_1} \int_{-A}^a \left( \frac{A-u}{u+A} \right)^{\alpha_1} \frac{(A-u)h(u)}{x-u} du, \quad (93) \\ p(x) - q(x) &= B \frac{\sin \pi \alpha_2}{\pi (A-x)} \left( \frac{A-x}{x+A} \right)^{-\alpha_2} \\ &\cdot \left[ (A-x) \left( \frac{S^*}{B} - x_0 + 2A\alpha_2 - x \right) + 2A\alpha_2 \left( \frac{S^*}{B} - x_0 + A\alpha_2 \right) - \frac{N-T}{B} \right] + \end{aligned}$$

<sup>13</sup> Siehe Bemerkung am Schlusse dieses Abschnittes.

$$+ \frac{C}{C^2 + \pi^2} h(x) + \frac{1}{C^2 + \pi^2} \frac{1}{A-x} \left( \frac{A-x}{x+A} \right)^{-\alpha_2} \int_{(C)}^a \left( \frac{A-u}{u+A} \right)^{\alpha_2} \frac{(A-u)h(u)}{x-u} du \quad (94)$$

mit

$$\operatorname{tg} \pi \alpha_1 = -\lambda_1 = -\frac{\pi}{C}, \quad -1 < \alpha_1 < 0; \quad \operatorname{tg} \pi \alpha_2 = -\lambda_2 = \frac{\pi}{C}, \quad -1 < \alpha_2 < 0. \quad (95)$$

Wegen Gl. (95) ist  $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ . Wir setzen wieder

$$-\alpha_1 = \vartheta, \quad -\alpha_2 = 1 - \vartheta, \quad \operatorname{tg} \pi \vartheta = \frac{\pi}{C}, \quad 0 < \vartheta < 1. \quad (96)$$

Bezeichnet man mit  $p_H(x)$  bzw.  $q_H(x)$  die Druck- bzw. Schubverteilung im Haftgebiet  $a \leq x \leq A$  und mit  $p_G(x)$  bzw.  $q_G(x)$  diese Größen im Gleitgebiet  $-A \leq x \leq a$ , so folgt aus Gl. (93) bzw. (94) mit (96) unter Beachtung von Gl. (89) für das Haftgebiet:

$$p_H(x) + q_H(x) = \frac{1}{A-x} \left( \frac{A-x}{x+A} \right)^{\vartheta} \left[ B \frac{\sin \pi \vartheta}{\pi} \Phi_1(x) - \frac{1}{C^2 + \pi^2} \int_{-A}^a \left( \frac{A-u}{u+A} \right)^{-\vartheta} \frac{(A-u)h(u)}{x-u} du \right] \quad (97)$$

bzw.

$$p_H(x) - q_H(x) = \frac{1}{A-x} \left( \frac{A-x}{x+A} \right)^{1-\vartheta} \left[ -B \frac{\sin \pi \vartheta}{\pi} \Phi_2(x) + \frac{1}{C^2 + \pi^2} \int_{-A}^a \left( \frac{A-u}{u+A} \right)^{\vartheta-1} \frac{(A-u)h(u)}{x-u} du \right] \quad (98)$$

mit

$$\Phi_1(x) \equiv (A-x) \left( \frac{S^*}{B} + x_0 + 2A\vartheta + x \right) - 2A\vartheta \left( \frac{S^*}{B} + x_0 + A\vartheta \right) + \frac{N+T}{B} \quad (99)$$

und

$$\Phi_2(x) \equiv (A-x) \left( \frac{S^*}{B} - x_0 - 2A(1-\vartheta) - x \right) - 2A(1-\vartheta) \left( \frac{S^*}{B} - x_0 - A(1-\vartheta) \right) - \frac{N-T}{B}. \quad (100)$$

Wegen Gl. (88) folgt aus Gl. (93) bzw. (94) mit (96) für das Gleitgebiet

$$(1 + \mu_0) p_G(x) = \frac{1}{A-x} \left( \frac{A-x}{x+A} \right)^{\vartheta} \left[ B \frac{\sin \pi \vartheta}{\pi} \Phi_1(x) - \frac{1}{C^2 + \pi^2} \int_{-A}^a \left( \frac{A-u}{u+A} \right)^{-\vartheta} \frac{(A-u)h(u)}{x-u} du \right] + \frac{C}{C^2 + \pi^2} h(x) \quad (101)$$

bzw.

$$(1 - \mu_0) p_G(x) = \frac{1}{A-x} \left( \frac{A-x}{x+A} \right)^{1-\vartheta} \left[ -B \frac{\sin \pi \vartheta}{\pi} \Phi_2(x) + \frac{1}{C^2 + \pi^2} \int_{-A}^a \left( \frac{A-u}{u+A} \right)^{\vartheta-1} \frac{(A-u)h(u)}{x-u} du \right] + \frac{C}{C^2 + \pi^2} h(x). \quad (102)$$

Elimination von  $p_G(x)$  aus Gl. (101) und (102) liefert für  $h(x)$  die Integralgleichung

$$C \mu_0 h(x) + \int_{-A}^a \frac{K(x, u) h(u)}{x-u} du = \frac{C^2 + \pi^2}{\pi} B \frac{\sin \pi \vartheta}{A-x} \left[ \frac{1 - \mu_0}{2} \left( \frac{A-x}{x+A} \right)^{\vartheta} \Phi_1(x) + \frac{1 + \mu_0}{2} \left( \frac{A-x}{x+A} \right)^{-\vartheta} \Phi_2(x) \right] \quad (103)$$



mit

$$K(x, u) = \frac{1 - \mu_0}{2} \left( \frac{u + A}{x + A} \right)^\vartheta \left( \frac{A - u}{A - x} \right)^{1-\vartheta} + \frac{1 + \mu_0}{2} \left( \frac{u + A}{x + A} \right)^{1-\vartheta} \left( \frac{A - u}{A - x} \right)^\vartheta. \quad (104)$$

Bemerkenswert ist, daß  $K(x, x) = 1$  ist.

Damit ist das System Gl. (86), (87) auf eine einzelne Integralgleichung für  $h(x)$  zurückgeführt, wobei Gl. (88) bereits erfüllt ist. Nach Lösung<sup>14</sup> von Gl. (103) [mit den Bedingungen  $h(a) = 0$  und  $h(-A) = \text{endlich}$ ] ergeben sich  $p_H(x)$ ,  $q_H(x)$  und  $p_G(x)$  durch Einsetzen der Funktion  $h(x)$  in Gl. (97), (98) und (101) oder (102). Sollte sich dabei herausstellen, daß nicht alle Rand- und Übergangsbedingungen

$$p_G(-A) = 0, \quad p_H(A) = 0, \quad q_H(A) = 0, \quad p_H(a) = p_G(a), \quad q_H(a) = \mu_0 p_G(a) \quad (105)$$

für alle  $\mu_0$  und für alle in Betracht kommenden  $T/N$  erfüllbar sind, müßte an der Anlaufseite ein zusätzliches Gleitgebiet eingeführt werden. Die Beziehungen (85) im Abschnitt über das reine Haften zeigen, daß diese Möglichkeit, zumindest für kleine  $\mu_0$  und bestimmte Bereiche  $T/N$ , in Erwägung zu ziehen ist. Die angegebene Methode läßt sich auch auf diesen Fall verallgemeinern. Gl. (87) wäre dann durch zwei Hilfsfunktionen  $h_1(x)$  und  $h_2(x)$  für die beiden Gleitgebiete zu erweitern, für die sich in analoger Weise zwei gekoppelte Integralgleichungen ergeben, die jedoch in punktefremden Intervallen gelten. Man kann daher, zumindest prinzipiell, eine der beiden lösen und diese Lösung in die andere einsetzen und diese lösen. Die unbekannten Funktionen  $p(x)$  und  $q(x)$  in den einzelnen Gebieten lassen sich dann in analoger Weise durch  $h_1(x)$  und  $h_2(x)$  darstellen.

Bezüglich der „Zweigebietslösung“ sei noch erwähnt, daß sich für den Spezialfall  $\mu_0 = 1$  die Hilfsfunktion  $h(x)$  mit Hilfe der im Abschnitt 3 zusammengestellten Formeln in geschlossener Form finden läßt. Man erhält unter Beachtung der angegebenen Randbedingungen  $h(x) = -B(a - x)^\vartheta (A - x)^{1-\vartheta}$ . Die Darstellungen für  $p(x)$  und  $q(x)$  enthalten hypergeometrische Reihen. Da dieser Spezialfall jedoch nicht von praktischem Interesse ist, soll er hier nicht gesondert behandelt werden.

#### Literaturverzeichnis

- O. Reynolds: On rolling friction. Phil. Trans. of the Royal Soc. London 1875.  
H. Hertz: Über die Berührung fester elastischer Körper. Journ. f. d. reine und ang. Math. **92**, (1881), S. 156.  
Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. Verh. d. Ver. zur Beförderung des Gewerbefleißes 1882.  
Über die Verteilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiszyylinder. Zs. f. Math. u. Phys. **28** (1883), S. 125; oder Ges. Werke Bd. I. Leipzig 1895, S. 155 bzw. 174 bzw. 283.  
G. Sachs: Versuche über die Reibung fester Körper an zylindrischen Reibungsriegen. Z. angew. Math. Mech. **4** (1924), S. 1.  
H. Fromm: Schlupfberechnung beim Rollen deformierbarer Scheiben. Z. angew. Math. Mech. **7** (1927), S. 27.  
Arbeitsverlust, Formänderungen und Schlupf beim Rollen von treibenden und gebremsten Rädern oder Scheiben. Zs. f. techn. Phys. **9** (1928), S. 299.  
L. Föppl: Die strenge Lösung für die rollende Reibung. Leibniz-Verlag München 1947.  
G. Heinrich: Zu L. Föppls Theorie der rollenden Reibung. Österr. Ingenieur-Arch. IV (1950), S. 363.  
E. Funaioli: Sullo slittamento elastico nel rotolamento. Atti Accad. naz. Lincei VIII, Ser. 15, (1953), S. 15.

<sup>14</sup> Es sind Methoden bekannt, die es gestatten, Gleichungen vom Typ (103) auf Fredholmsche Integralgleichungen zurückzuführen (N. I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations, Groningen, Holland 1953, S. 323ff.) oder direkt zu lösen (W. D. Kupradse, Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen, Berlin, 1956, S. 189ff.). Wenn die Lösung von Gl. (103) mit erträglichem Rechenaufwand möglich ist, soll diese in einer späteren Arbeit folgen.

(Eingegangen am 5. März 1957)

## Otto Lange — 70 Jahre

Der Jubilar, der am 26. April in voller Frische und unermüdlicher Tätigkeit seinen 70. Geburtstag feiern durfte, kann wohl mit Recht auf ein außerordentlich erfolgreiches Lebenswerk zurückblicken. Ihm ist es zu danken, daß ein so repräsentatives Sprachrohr wie der in der ganzen Welt bestens bekannte und geschätzte Wiener Springer-Verlag den österreichischen Wissenschaftlern und Technikern für ihre Publikationen zur Verfügung steht.

Otto Lange hat ein Leben lang seine große Begabung und seine nie erlahmende Tatkraft dem Verlagswesen gewidmet, insbesondere dem Springer-Verlag, in dessen Berliner Stammhaus 1910 seine Laufbahn begann. Schon 1924 wurde er Leiter des Wiener Springer-Verlages, dessen geschäftsführender Gesellschafter er seit 1935 ist. Als dann im Jahre 1945 das Wiener Geschäftshaus einem Brand zum Opfer fiel und der Erfolg jahrelanger Arbeit vernichtet war, ging Otto Lange mit größtem Fleiß und dem ihm eigenen bewundernswerten Optimismus unter schwierigsten Verhältnissen an den Wiederaufbau des Wiener Verlages, und die große Zahl bedeutender wissenschaftlicher Werke, die er in rund zehn Jahren auflegen konnte, beweist seine Tatkraft. Schon Ende 1945 erschienen eine ganze Reihe österreichischer Zeitschriften wieder und neue wurden gegründet, darunter auch das „Österreichische Ingenieur-Archiv“, dem er besondere Sorgfalt angedeihen läßt. Damit ist ein repräsentatives wissenschaftliches Organ für die Techniker geschaffen worden, das nicht nur bereits anerkannten Fachleuten, sondern auch jungen Habilitanten und Dissertanten die Veröffentlichung längerer Arbeiten ermöglicht.

Otto Lange, dem das Ansehen des Wiener Springer-Verlages besonders am Herzen liegt, hat schon viele an sich ausgezeichnete Werke verlegt, auch wenn sie von vornherein keinen großen Verkaufserfolg versprochen. In Anerkennung seiner Verdienste um die technischen Wissenschaften verlieh ihm die Technische Hochschule Wien im Jahre 1947 und die Montanistische Hochschule in Leoben 1956 die Würde eines akademischen Ehrenbürgers.

Die österreichische Technikerschaft wünscht Herrn Lange, dessen Frische, Lebhaftigkeit und Optimismus sein Alter kaum erraten lassen, auch für die Zukunft allen Erfolg bei bester Gesundheit.

*F. Magyar, Wien*

## Mitteilung

### Jahrestreffen 1957 der Verfahrens-Ingenieure

Das diesjährige Jahrestreffen der Verfahrens-Ingenieure wird vom 6. bis 9. Oktober in Stuttgart stattfinden. Es wird veranstaltet von der VDI-Fachgruppe Verfahrenstechnik, der Fachabteilung Apparate und Anlagen für die chemische und verwandte Industrien in der Fachgemeinschaft Apparatebau des VDMA und der Forschungsgesellschaft Verfahrenstechnik.

Nach einer Plenarveranstaltung am Vormittag des 7. Oktober, auf der unter anderem Prof. Dr. J. Bartels, Göttingen, über das Internationale Geophysikalische Jahr berichten wird, finden am Nachmittag des 7. und am 8. Oktober die Fachvorträge in zwei parallel laufenden Veranstaltungen statt. Für den 9. Oktober sind Besichtigungen und Exkursionen vorgesehen.

In zeitlichem Anschluß an das Jahrestreffen, vom 10. bis 12. Oktober, wird die Jahrestagung der Fédération Européenne des Constructeurs d'Équipement Pétrolier (FECEP) abgehalten. Hierbei werden vor allem Fragen der korrosionsfesten Baustoffe und der Meß- und Regelgeräte behandelt werden.

Auskünfte über das Jahrestreffen erteilt die VDI-Fachgruppe Verfahrenstechnik, Frankfurt/M., Rheingau Allee 25. Nähere Einzelheiten über die FECEP-Tagung sind bei der Fachgemeinschaft Apparatebau des VDMA, Düsseldorf-Oberkassel, Lueg-Allee 63, zu erfahren.



## Buchbesprechungen

**Vibration Analysis Tables.** Von *R. E. D. Bishop* und *D. C. Johnson*. VIII, 59 S. Cambridge: At the University Press. 1956. 10s. 6d.

Die Durchrechnung von zusammengesetzten linearen Schwingungssystemen kann, obwohl sie keine grundsätzlichen mathematischen Schwierigkeiten bietet, recht zeitraubend sein. Man wird es daher sehr begrüßen, daß im vorliegenden Heft eine Zusammenstellung fertiger Formeln gegeben wird. Im einzelnen enthalten die Tabellen Einflußzahlen für Systeme von einem bis drei Freiheitsgraden und für aus Untersystemen zusammengesetzte Systeme. Anschließend wird eine Tabelle von Frequenzgleichungen gebracht. Dann folgen Einflußzahlen, Eigenwerte und Eigenfunktionen für die schwingende Saite, für die Drehschwingungen von Stäben mit Kreisquerschnitt und für die Längs- und Biegeschwingungen von Balken mit konstantem Querschnitt. Querkrafteinfluß und Rotationsträgheit werden nicht berücksichtigt. Eine Reihe von Hilfsfunktionen, ebenso wie die ersten fünf Eigenfunktionen des querschwingenden Balkens unter verschiedenen Lagerungsbedingungen sind tabuliert.

Darstellung und Druck sind sehr klar und übersichtlich. Druckfehler konnte der Besprecher nicht entdecken, obwohl er eine Reihe von Stichproben machte und auch einige kompliziertere Formeln nachprüfen ließ.

Für den Benutzer, der die Tafeln unabhängig von dem von den Verfassern geplanten Lehrbuch verwenden möchte, wäre vielleicht die Wiedergabe eines oder mehrerer Anwendungsbeispiele wünschenswert gewesen.

Das Buch kann jedem, der mit der praktischen Bearbeitung von Schwingungsaufgaben zu tun hat, durchaus empfohlen werden.

*H. Parkus, Wien*

**Technische Strömungslehre.** Von *B. Eck*. Fünfte Auflage. Mit 407 Textabb., X, 422 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 29.40.

Es ist erfreulich zu lesen, daß bereits nach knapp drei Jahren eine neue Auflage von obenstehendem Werk notwendig geworden ist, weil man daraus ersehen kann, daß das Interesse an der Strömungslehre gestiegen ist. Andererseits ist es aber auch ein Zeichen, daß die Technische Strömungslehre von *B. Eck*, von der bereits die fünfte Auflage nunmehr erscheint, ein sehr gutes Buch für Studium und Praxis ist, das bei jeder neuen Auflage verschiedenen Wünschen durch Verbesserungen und neue Abbildungen entgegenkommt.

Es ist zu wünschen, daß dieses Werk auch weiterhin weiteste Verbreitung finden möge.

*R. Bruniak, Wien*

**Untersuchungen über die dreidimensionale Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter.** Von *Th. Ginsburg*. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH in Zürich: Nr. 22.) Mit 36 Textabb., 79 S. Zürich: Verlag Leemann. 1956.

Das Problem der zweidimensionalen, inkompressiblen Potentialströmung durch ebene Schaufelgitter, wie es bei der Abwicklung von coaxialen Zylinderschnitten der Axialräder auftritt, ist nach der Singularitätenmethode oder mit Hilfe der konformen Abbildung in grundlegenden Arbeiten behandelt worden. In der vorliegenden Arbeit hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, die von der Dreidimensionalität der Strömung herrührenden Zusatzeffekte zu ermitteln. Er denkt sich die Schaufeln als Schraubenflächen mit geraden radialen Erzeugenden, die als Stabwirbel aufgefaßt werden. Das Geschwindigkeitsfeld des Wirbels wird durch die zylindrische Begrenzung geändert und die sich dadurch ergebenden Zusatzgeschwindigkeiten folgen aus einer längeren Rechnung. Die größten Zusatzeffekte zeigen sich am Naben- und Außenzylinder.

Der Verfasser verbindet mit seiner ausführlichen theoretischen Arbeit auch experimentelle Untersuchungen auf Grund der elektrolytischen Analogie. Wenn auch die Korrekturen nicht groß sind, so ist die Berechnung derselben doch sehr interessant.

*R. Bruniak, Wien*

**Engineering Structural Failures.** The Causes and Results of Failure in Modern Structures of Various Types. Von *R. Hammond*. Mit 125 Textabb., 224 S. London: Odhams Press Ltd. 1956. 25s.

Erfahrungen können nur langsam und auf Kosten von Irrtümern und Fehlern gesammelt werden. Deshalb ist es gerade für den Ingenieur sehr wichtig, die Ursachen und Folgen von Fehlkonstruktionen kennenzulernen. Der Autor unternimmt es in dankenswerter Weise, verschiedene der wichtigsten im vergangenen Jahrhundert aufgetretenen Bauschäden und Katastrophen zu untersuchen, die vielleicht bereits in Vergessenheit geraten sind oder als nicht restlos geklärt galten.

Die angeführten Beispiele sind aus nahezu allen Fachgebieten der Ingenieurpraxis ausgewählt und betreffen: Schüttungen, Dämme, Hafenanlagen, Bauten, Brücken, Schwingungs-



probleme, Tunnels und Schweißkonstruktionen. Als Abschluß zieht der Autor die Lehren aus den Ursachen der Versager.

Besonders interessant ist die Untersuchung der Ursachen des Bruches der Kabinenwand des „de Havilland“-Düsenflugzeuges Comet G-ALYP, der zu schweren Katastrophen geführt hat und noch allgemein in Erinnerung sein dürfte. Der Verfasser bringt die von der „de Havilland“ in eigenen „Aircraft Testing Tanks“ durchgeführten Ermüdungsteste, durch welche die Ursache der Zerstörung schließlich festgestellt werden konnte.

F. Magyar, Wien

**Cálculo de Concreto Armado.** Von T. van Langendonck. Band I. Zweite Auflage. Mit 234 Textabb. und 1 Tabellenanhang, XXXI, 500 S. Sao Paulo: Associacao Brasileira de Cimento Portland. 1954.

Der erste Band von Langendoncks Werk „Die Berechnung des Stahlbetons“ mit 500 Seiten Umfang wird durch einen zweiten Band mit 634 Seiten ergänzt. Eine nicht gewöhnlich breite Darstellung der Probleme des Stahlbetonbaus. Es ist aber nicht alles Gebrachte Lehre vom Stahlbeton. Dieser I. Band bringt im I. Kapitel auf 139 Seiten die Grundlagen der Statik, Baumechanik und Festigkeitslehre mit deutlicher Hinordnung auf die Erfordernisse des Stahlbetons, wobei Kraftspiel und Verformung gleichermaßen Berücksichtigung finden. Ergänzt werden diese theoretischen Darlegungen durch ausführliche Tafeln (Seite 403 bis 481). Diese vereinfachen die Rechenarbeiten bei der Ermittlung von Flächenmomenten und der aus diesen abgeleiteten statischen Größen und dienen zum anderen Teil als Hilfsmittel für die Berechnung statisch unbestimmter Balken und einfacher Steifrahmen.

Die beiden Kapitel II und III mit zusammen 258 Seiten Umfang befassen sich mit dem eigentlichen Thema, dem Stahlbeton.

Das erstere ist der Beschreibung der Materialeigenschaften des Betons und des Bewehrungsstahles gewidmet. Diese Beschreibung erfolgt sehr ausführlich, wird durch zahlreiche, vergleichende Diagramme anschaulich unterstützt und in zahlreichen Fußnoten wird der Leser auf das Schrifttum verwiesen, so daß dieser reiche Literaturhinweis dieses Kapitels II fast zu einem Nachschlagwerk über alle Fragen der Beton- und Bewehrungsstahltechnologie macht. Selbstverständlich wird auch auf die in verschiedenen Kulturstaaten bestehenden Vorschriften über die im Berechnungsverfahren anzuwendenden Materialkonstanten ausführlich und vergleichend eingegangen.

Das III. Kapitel behandelt den Stahlbetonstab mit Druck und Zugbeanspruchung. Der Verfasser geht von der allgemeinsten Problemstellung aus. Er behandelt also zuerst die Aufgaben des mit Biege- und Schubspannungen kombinierten Lastfalles des Druck- bzw. Zugstabes, um dann zu den einfachen Aufgaben des reinen Druckes bzw. Zuges zurückzukommen. Eigenspannungen des Stahlbetonstabes, die aus der Raumunbeständigkeit des Betons (Schwinden, Kriechen) folgen, sowie die Probleme des vorgespannten Stabes finden ihre Behandlung. Die schriftliche und rechnerische Darstellung der Probleme findet in zahlreichen Literaturhinweisen, guter Bebilderung und genügender Ausstattung mit Schaubildern vergleichender Art ihre sinnvolle Ergänzung.

Sonderprobleme reiner Druckbeanspruchung, wie die Verankerung von Spanngliedern in Spannbetonbalken, Balkenlagerkörper, Fundamentgestaltung und Widerlagerkonstruktionen, werden schon hier behandelt. Die Behandlung dieser Sonderprobleme zwingt zu einem weiten Ausholen auf Gebiete, die mit dem eigentlichen Druckstab nicht direkt zusammenhängen. Es finden sich z. B. zahlreiche gut bilderte Darstellungen über die Spannstahlführung in Spannbetonbalken. Diese Wahl der Stoffgruppierung mag dazu beitragen, daß dieses Kapitel III einen größeren Umfang hat, als er uns gewöhnlich in Stahlbetonbüchern entgegentritt.

Die gute Ausstattung und theoretisch einwandfrei fundierten Berechnungsmethoden, auch für nicht alltägliche Lastfälle, sowie zahlreiche Rechenbeispiele machen dieses Buch allen Stahlbetoningenieuren besonders wertvoll.

F. Pongratz, Wien

**Probleme der Plastizitätstheorie.** Von W. Prager. (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften: Band 17.) Mit 52 Textabb., 100 S. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag. 1955. Geb. sfr. 12.50.

Einer kurzen Einführung in das mechanische Verhalten plastischer Stoffe folgen einige Anwendungsbeispiele, so die Behandlung eines I-Trägers unter Biegung und Längskraft, eines dünnwandigen Rohres unter Zug und Torsion, ferner statisch unbestimmte Fachwerke. Den breitesten Raum nimmt das Traglastverfahren ein mit seinen Anwendungen auf Rahmen, Platten und zylindrische Schalen. Zum Abschluß folgen Betrachtungen über endliche plastische Formänderungen, wie sie z. B. beim Stangpressen vorkommen.

Das Buch verdankt seine Entstehung einer Reihe von Vorträgen, die der Verfasser an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich Ende 1954 hielt. Die Darstellung ist außer-



ordentlich flüssig, und manches alte Problem der Plastizitätstheorie wird in ganz neuer Beleuchtung behandelt. An Stelle mathematischer Ableitungen wird oft und mit großem Geschick mit mechanischen Gedankenmodellen und geometrischen Darstellungen gearbeitet.

Das Werk kann als eine willkommene Ergänzung zu Prager-Hodges „Theorie ideal plastischer Körper“ (deutsch von F. Chmelka; Springer-Wien, 1954) betrachtet werden, kann aber auch unabhängig davon mit Genuß gelesen werden, sofern man nur einigermaßen mit den Grundlagen der Plastizitätstheorie vertraut ist. *F. Chmelka, Wien*

**Einführung in die Technische Mechanik.** Nach Vorlesungen. Von *I. Szabó*. Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 492 Textabb., XII, 397 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. Geb. DM 22.50.

Die Notwendigkeit einer Neuauflage dieses elementaren Lehrbuches innerhalb von zwei Jahren zeigt, wie stark die Nachfrage der Studierenden nach einer modern geschriebenen technischen Mechanik ist. Das ausgezeichnete Werk von Ziegler werden sich ja nur wenige anschaffen können.

Der Aufbau des Buches ist gegenüber der ersten Auflage unverändert geblieben, doch wurde eine Reihe von Besprecherwünschen berücksichtigt und die erfreulich große Anzahl von Übungsaufgaben weiter vermehrt. Einige Flüchtigkeiten sind allerdings noch geblieben, etwa bei der Ableitung des Schwerpunktsatzes, wo unnötigerweise vom starren Körper ausgegangen, als Anwendung aber Geschloß und Geschütz bzw. Boot und Insassen gebracht wird. Auch über den Energiesatz wäre wohl mehr und Schärferes zu sagen.

Sehr schön sind die zahlreich eingestreuten historischen Bemerkungen.

Man wird das Buch dem Ingenieurstudenten gerne empfehlen.

*H. Parkus, Wien*

**Engineering Inspection, Measurement and Testing.** Von *H. C. Town* und *R. Colebourne*. Mit 176 Textabb., 192 S. London: Odhams Press. Ltd. 1956. 21s.

Diese umfassende Darstellung des Prüfens und Feinmessens zur zahlenmäßigen Bestimmung von Längen, Winkeln, Formen, Geradheit, Ebenheit und Rauheit von Oberflächen technischer Körper in Werkstätten und Kontrollabteilungen neuzeitlicher Fertigungsbetriebe verliert sich nicht in bloßer Beschreibung von Meßgeräten und Meßmaschinen, sondern behandelt in eigenen Abschnitten auch die Grundlagen mechanischer, optischer, elektrischer, pneumatischer und elektronischer Meßverfahren. Das Buch zeigt an praktischen Beispielen, wie mit einfachen mechanischen Meßmitteln Meßaufgaben gelöst werden, die erfahrungsgemäß den Studierenden Schwierigkeit bereiten im Herausfinden des oft recht einfachen mathematisch-trigonometrischen Problems und seiner Formulierung. Hierbei auch den kleinsten Rechnungsschritt anzugeben, führt allerdings zu unnötiger Breite.

Andererseits vermißt man selbst den bescheidensten Hinweis für das Messen an Zahnrädern und fast jeden Schrifttumsnachweis. Auf die unbedingte Notwendigkeit einer geordneten Meßabteilung für die Reihenfertigung und zur Durchführung von Qualitätskontrollen wird eingangs hingewiesen.

Den Verfassern ist es gelungen — wohl aus ihrer praktischen Tätigkeit am City and Guilds of London Institute bzw. am Keighley Technical College heraus —, für die Studierenden dieses Schultyps ein sehr gutes Lehr- und Vorbereitungsbuch für die Prüfungen in dem neu in den Studienplan aufgenommenen Gegenstand „Meßtechnik“ zu schaffen.

Für den deutschsprechenden Meßtechniker liegt das „Taschenbuch für Längenmeßtechnik“ und die Schriftenreihe „Technisches Messen in Einzeldarstellungen“ vor. Dennoch ist das Buch von Town-Colebourne für jenen von sehr beachtlichem Wert, weil es verlässliche Angaben über das derzeitige englische Toleranz- und Passungssystem, über die gegenwärtig wichtigen Gewindeformen und ihre Toleranzen, Ausführungen über Mehrfach-Prüfeinrichtungen, nicht so leicht zugängliche Nachrichten über „Messen während des Arbeitens“ und weil es den neuesten Entwicklungsstand von Meßgeräten und Maschinen spezifisch-englischer Herkunft enthält.

*R. Vockenberger, Wien*



*Soeben erschienen:*

# Die Mikrophotographie

Von

**Dr. Kurt Michel**

Aalen/Württemberg

Mit 550 teils farbigen Textabbildungen. XXXII, 740 Seiten. Gr.-8°. 1957

(Die wissenschaftliche und angewandte Photographie, Band X)

Ganzleinen S 840.—, DM 140.—, sfr. 143.40, \$ 33.30

Das Mikroskop ist schon lange nicht mehr nur das Handwerkszeug einer kleinen Gruppe von Forschern. Es ist heute in praktisch jedem Laboratorium ein unentbehrliches Hilfsmittel und in sehr vielen Fällen spielt es auch bereits in der industriellen Fertigung eine wichtige Rolle. Zum Festhalten der Beobachtungsergebnisse bedient man sich in der Regel der photographischen Verfahren. Die Kombination von Mikroskopie und Photographie, die **Mikrophotographie**, hat sich zu einer wichtigen Technik entwickelt, und es wurde schon lange als schwerwiegender Mangel empfunden, daß seit beinahe 20 Jahren eine zusammenfassende systematische Darstellung dieses Gebietes in deutscher Sprache fehlt. Im vorliegenden Band unternimmt es ein seit langem bekannter Fachmann, der als Leiter der Abteilung für Mikroskopie der Firma CARL ZEISS mit den Geräten besonders vertraut ist, eine solche, den neuesten Stand berücksichtigende Darstellung zu geben. Der Band gliedert sich in drei Teile. Im ersten wird ein konzentrierter Überblick über die theoretischen Grundlagen der Mikroskopie und Mikrophotographie gegeben, ohne deren Kenntnis eine Beherrschung der Praxis immer Stückwerk bleiben muß. Der zweite Teil behandelt die Geräte und der dritte schließlich die mikrophotographischen Methoden. Die Ausführungen werden durch eine große Zahl zum überwiegenden Teil für das Buch eigens neu angefertigter Abbildungen erläutert.

**Rentabilität.** Fehlinvestitionen, ihre Ursache und ihre Verhütung. Von Oberbaurat Ing. B. M. Gerbel, Wien. Zugleich zweite, umgearbeitete und ergänzte Auflage der „Rentabilität industrieller Anschaffungen“. Mit 26 Textabbildungen. IX, 264 Seiten. Gr.-8°. 1955. Ganzleinen S 174.—, DM 29.—, sfr. 29.70, \$ 6.90

„Das überaus anregend geschriebene Buch von Gerbel erfüllt zwei Aufgaben; es enthält einmal wichtige Hinweise für das Vermeiden von Fehlinvestitionen, Ratschläge, die in einer Zeit konjunkturellen Aufschwungs ganz besonderen Wert haben, zumal sie von einem Wirtschaftsberater kommen, der sie sich in fünfzigjähriger Praxis erarbeitet hat; zum anderen vermittelt ein Ingenieur seinen Kollegen — auch den angehenden — allgemeine Wirtschaftskenntnisse und Verfahrensgrundsätze wirtschaftlichen Handelns... — Im ersten Kapitel werden die grundlegenden Unterschiede zwischen der technischen und kaufmännischen Denkweise aufgezeigt; es folgt das Hauptkapitel ‚Über Rentabilität‘. Daran schließen sich die Ausführungen ‚Über das Kaufen im allgemeinen und das Investieren im besonderen‘, über ‚Fehlinvestitionen und ihre Ursachen‘ und schließlich über ‚Heilmittel gegen die Krankheit des Wirtschaftsobjektes‘.“

VDI-Zeitschrift

**Die Rentabilität der Produktivitätssteigerung.** Ein Beitrag zur Lehre der Rechenhaftigkeit der Wirtschaft. Von Oberbaurat Dipl.-Ing. B. M. Gerbel, Wien. Mit 4 Textabbildungen und 1 Ausschlagnabelle. V, 48 Seiten. Gr.-8°. 1952.

Steif geheftet S 34.—, DM 5.60, sfr. 5.80, \$ 1.35

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung



*Das internationale wissenschaftliche Organ der Astronautik*

# ASTRONAUTICA ACTA

OFFIZIELLES ORGAN DER  
INTERNATIONALEN  
ASTRONAUTISCHEN  
FÖDERATION

OFFICIAL JOURNAL OF THE  
INTERNATIONAL  
ASTRONAUTICAL  
FEDERATION

ORGANE OFFICIEL DE LA  
FÉDÉRATION  
INTERNATIONALE  
D'ASTRONAUTIQUE

HERAUSGEGEBEN VON / EDITORIAL BOARD / COMITÉ DES RÉDACTEURS

W. v. BRAUN-Huntsville/Ala. • A. EULA-Roma • J. M. J. KOOY-Breda  
F. I. ORDWAY III-Huntsville/Ala. • E. SÄNGER-Stuttgart • K. SCHÜTTE-München  
L. R. SHEPHERD-Chilton • J. STEMMER-Baden/Schweiz

SCHRIFTFÜHRUNG / EDITOR-IN-CHIEF / RÉDACTEUR EN CHEF  
F. HECHT-Wien

Die Zeitschrift erscheint vierteljährlich (1957: 3. Jahrgang)

Jahresbezugspreis S 216.—, DM 36.—, sfr. 37.20, \$ 8.60

Ab 1957 erscheinen die „Astronautica Acta“ bei unverändertem Bezugspreis im beträchtlich erweiterten Umfang von 256 Seiten pro Jahr. Trotz bedeutender Kostensteigerungen in den letzten Monaten hat sich der Verlag zu dieser Maßnahme entschlossen, um dem wachsenden Bedürfnis nach Veröffentlichung der immer zahlreicher einlaufenden wichtigen Beiträge entsprechen zu können.

Mitglieder der Internationalen Astronautischen Föderation (IAF)  
bzw. deren Mitgliedsgesellschaften können die Zeitschrift als das  
Organ der IAF zu einem um 20% ermäßigten Preis beziehen

Band III, Heft 1 (1957): Canney, H. E., Jr., and F. I. Ordway, III, The Uses of Artificial Satellite Vehicles. Part II. – Klemperer, W. B., and R. M. L. Baker, Jr., Satellite Librations. – Kaeppler, H. J., und G. Baumann, Über Systeme mit chemisch reagierenden Komponenten im Gleichgewicht. – Hecht, F., und R. Patzak, Chemische Analyse von in Tiefseesedimenten gefundenen mikroskopischen Kügelchen vermutlich kosmischen Ursprunges. – Cremona, C. E., Metodo fotografico per la determinazione della resistenza aerodinamica di missili in volo. – Ordway, F. I., III, Project Vanguard – Earth Satellite Vehicle Program. Characteristics, Testing, Guidance, Control, and Tracking.

---

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Printed in Austria